MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT.

UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
BERLIN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
BERLIN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

. BLASCHKE L. FEJER G. HERGLOTZ A. KNESER E. LANDAU
O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

4. BAND

QA1
M88
v.4-7

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1919

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
BERLIN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
BERLIN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJER G. HERGLOTZ A. KNESER E. LANDAU
O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

4. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1919

Inhaltsverzeichnis

Seite

Bieberbach, L., Aufstellung und Beweis des Drehungssatzes für schlichte konforme Abbildungen 295

Cramer, H., Studien über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion . . 104

Hahn, H., Über Funktionen mehrerer Veränderlicher, die nach jeder einzelnen Veränderlichen stetig sind 306

Hamburger, H., Beiträge zur Konvergenztheorie der Stieltjesschen Kettenbrüche 186

Hausdorff, F., Zur Verteilung der fortsetzbaren Potenzreihen 98

Landau, E., Zur Theorie der Heckeschen Zetafunktionen, welche komplexen Charakteren entsprechen 152

Liebmann, H., Das Frobeniussche Kappendreieck und die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises 288

Mises, R. v., Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung 1

Ostrowski, A., Über ein Analogon der Wronskischen Determinante bei Funktionen mehrerer Veränderlicher 223

Ostrowski, A., Beweis der Irreduzibilität der Diskriminante einer algebraischen Form von mehreren Variablen 314

Perron, O., Über eine spezielle Klasse von Regelflächen 231

Rademacher, H., Über streckentreue und winkeltreue Abbildung 131

Rademacher, H., Bemerkungen zu den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und zum Moreraschen Satz 177

Schur, I., Über das Maximum des absoluten Betrages eines Polynoms in einem gegebenen Intervall 271

Szász, O., Über Potenzreihen und Bilinearformen 163

Szegö, G., Über Orthogonalsysteme von Polynomen 139

Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von

R. v. Mises in Frankfurt a. M.

Übersicht.

I. Teil: Analytische Entwicklungen.

§ 1. Sätze über den Grenzwert eines Produktes von Funktionen (I, II).

§ 2. Korollare zu den Sätzen des § 1.

§ 3. Sätze über den Grenzwert eines Integralproduktes von Funktionen (III, IV, V).

§ 4. Vorbereitungen zum Beweis der Behauptung III.

§ 5. Beweis der Behauptung III.

§ 6. Korollare zu den Sätzen des § 3.

II. Teil: Anwendungen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

§ 7. Die Binomialzahlen, der Bernoullische und Poissonsche Fall und seine Verallgemeinerung.

§ 8. Der erste Fundamentalsatz.

§ 9. Das Bayessche Problem und seine Verallgemeinerung.

§ 10. Der zweite Fundamentalsatz.

Wer die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in den letzten Jahrzehnten verfolgt, wird sich dem Eindruck nicht verschließen, daß dieser Zweig der mathematischen Wissenschaft in zweierlei Hinsicht hinter allen anderen bedeutend zurückgeblieben ist. Es fehlt einmal — nur wenige Arbeiten russischer Mathematiker bilden da eine Ausnahme — den *analytischen Sätzen* der Wahrscheinlichkeitsrechnung jene *Präzision der Formulierung und Beweisführung*, die in anderen Teilen der Analysis längst zur Selbstverständlichkeit geworden ist. Und es besteht andererseits, trotz mancher wertvoller Ansätze, über die *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung als einer mathematischen Disziplin* heute noch so gut wie keine Klarheit: was um so erstaunlicher erscheint, als wir nicht nur in einer Zeit lebhaften Interesses für axiomatische Fragen innerhalb

der Mathematik, sondern auch in einer Epoche stetig wachsender Aus
breitung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf den verschiedensten An
wendungsgebieten leben.

Die vorliegende Arbeit will nur dem erstangeführten Mangel Rechnun
tragen, indem sie versucht, eine große Reihe von Einzelproblemen de
Wahrscheinlichkeitsrechnung (das Bernoullische und Poissonsche Proble
und seine Verallgemeinerung, das Gaußsche Fehlergesetz, das Gesetz de
großen Zahl: dann das Bayessche und Laplace-Bienaymésche Proble
und seine Verallgemeinerung, einen zweiten Satz der Fehlertheorie und ei
zweites Gesetz der großen Zahl) von einem einheitlichen und allgemeine
analytischen Gesichtspunkt aus zu bewältigen. Dabei ließ es sich natu
gemäß nicht vermeiden, daß die Darstellung, namentlich im zweiten Te
dieser Arbeit, auf einem bestimmten System von „Grundlagen" aufge
baut wurde, dessen zusammenhängende und erschöpfende Darstellung i
diesem Rahmen unmöglich war. Nur das für die Formulierung der beide
„Fundamentalsätze" Notwendigste ist in den §§ 8 und 10 auseinandergesetz
Wenn man mit Recht die an diesen Stellen gegebenen Andeutungen fü
unvollständig und mancher Aufklärung bedürftig erkennen wird, so habe ic
doch andererseits alles getan, um die Ergebnisse auch im Anschluß an di
heute üblichen Begriffsbildungen und Ausdrucksweisen der Wahrscheinlic
keitsrechnung verständlich zu machen. Eine zusammenfassende Darstellu
der „Grundlagen" soll — wenn anders Zeit und Umstände es noch g
statten — bei späterer Gelegenheit vorgelegt werden.

Der *erste* Teil dieser Arbeit, enthaltend die *„analytischen Entwicklungen"*
geht von einem einfachen, durchaus nicht tiefliegenden, aber wie es schein
neuen und jedenfalls für die Wahrscheinlichkeitsrechnung sehr fruchtbare
Satz der Analysis aus, der im wesentlichen folgendes besagt[1]). S
$f_1, f_2, f_3, \ldots$ eine unbeschränkte Folge von Funktionen einer reell
Variablen x, die an bestimmten, im Endlichen gelegenen Stell
$x = a_1, a_2, a_3, \ldots$ ein *reelles, endliches Maximum* und eine *reelle, nic
verschwindende zweite Ableitung* besitzen, so gilt, gleichmäßig in jede
endlichen Intervall von u:

$$\text{(a)} \qquad \lim_{n=\infty} \left[f_1\left(a_1 + \frac{u}{r_n}\right) \cdot f_2\left(a_2 + \frac{u}{r_n}\right) \ldots f_n\left(a_n + \frac{u}{r_n}\right) \right] = \text{konst.}\, e^{-u^2},$$

wo r_n^2 eine mit n wachsende positive Größe (die negative halbe Summe d
genannten zweiten Ableitungen von $f_1 \ldots f_n$) bedeutet. Genügen überdi
die f noch gewissen Bedingungen im Unendlichen, so gilt auch

---

[1]) Die *vollständigen* Voraussetzungen der Sätze usw. sind in dieser Einleitu
durchwegs *nicht* angegeben.

(b) $$\lim_{n=\infty} \int_a^b f_1\left(a_1+\frac{u}{r_n}\right)\cdot f_2\left(a_2+\frac{u}{r_n}\right)\dots f_n\left(a_n+\frac{u}{r_n}\right)du = \text{konst.}\int_a^b e^{-u^2}du$$

für beliebige endliche oder unendliche a und b. Von dem speziellen Fall dieses Satzes, in dem alle f außerhalb des Bereiches $0 \leqq x \leqq 1$ verschwinden und innerhalb desselben durch $x^a(1-x)^{1-a}$, $(0<a<1)$ dargestellt werden, macht man in der heutigen Wahrscheinlichkeitsrechnung zum Beweis der Laplace-Bayesschen Formel Gebrauch. In den §§ 1 und 2 werden die beiden in (a) und (b) enthaltenen allgemeinen Behauptungen I und II unter dort näher angegebenen Voraussetzungen bewiesen und durch einige für die Anwendungen wichtige Korollare, namentlich die Ausdehnung auf mehrere unabhängige Variable, ergänzt.

Die Ergebnisse der beiden ersten Paragraphen dienen zunächst in § 3 dazu, um zwei im wesentlichen bekannte, aber niemals mit den richtigen Voraussetzungen formulierte, geschweige denn bewiesene Sätze IV und V unter Verwendung eines von Laplace herrührenden Gedankens („erzeugende Funktion") zu erledigen. Sei $v_1, v_2, v_3, \dots$ eine unbeschränkte Folge reeller, nicht negativer Funktionen der reellen Variablen x, deren von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecktes Integral gleich 1 ist, und die im wesentlichen dadurch charakterisiert sind, daß *ihre Gesamtschwankungen eine endliche obere Schranke* besitzen. Dann gilt, gleichmäßig in jedem endlichen Bereich von u:

(d) $$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} v_1(x_1)v_2(x_2)\dots v_{n-1}(x_{n-1})v_n(r_n u+b_n-x_1-x_2-\dots - x_{n-1})\,dx_1\dots dx_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2},$$

wo r_n und b_n gewisse, durch $v_1, v_2, \dots, v_n$ bestimmte Größen (b_n die Summe der „Mittelwerte" $a_\varkappa = \int_{-\infty}^{\infty} x v_\varkappa(x)\,dx$, r_n^2 die doppelte Summe der „Streuungen" $\int_{-\infty}^{\infty}(x-a_\varkappa)^2 v_\varkappa(x)\,dx$, $\varkappa = 1, 2, 3, \dots n$) bezeichnen. Hat man andererseits statt der Funktionen $v_1, v_2, v_3, \dots$ einzelne Folgen nicht negativer Zahlen $\mathfrak{v}_1(x)$, $\mathfrak{v}_2(x)$, $\mathfrak{v}_3(x), \dots$ mit $x = 0, 1, 2, \dots$, wobei die über x erstreckte Summe jedesmal 1 beträgt und die $\mathfrak{v}_\varkappa(x)$ die wesentliche Eigenschaft aufweisen, daß *für jedes $\varkappa$ wenigstens ein Paar unmittelbar aufeinander folgender x-Werte durch nicht verschwindende $\mathfrak{v}$-Werte besetzt* ist, so gilt, ebenfalls gleichmäßig für endliche u:

(e) $$\lim_{n=\infty} r_n \sum_{x_1}\sum_{x_2}\dots\sum_{x_{n-1}} \mathfrak{v}_1(x_1)\cdot\mathfrak{v}_2(x_2)\dots\mathfrak{v}_n(x_n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2},$$

wenn bei der Summation über alle x-Werte $x_1 + x_2 + \dots + x_n = r_n u_n + b_n$

gesetzt wird, mit $\lim u_n = u$ und bei analoger Bedeutung von b_n und r wie oben. Man erkennt, daß in (e) ein interessanter Satz über die Koeffizienten eines Polynoms, das als ein *Produkt sehr vieler Polynome mit positiven Koeffizienten* erscheint, enthalten ist (vgl. § 7, 4).

In beiden Fällen, sowohl in dem zu (d) führenden Fall „geometrischer" wie in dem zu (e) führenden „arithmetischer" Wahrscheinlichkeiten, kann man überdies eine analoge Gleichung für den *Grenzwert des unbestimmten Integrals* der linken Seite von (d) bzw. (e) angeben, wenn man statt der $v_\varkappa(x)$ bzw. $\mathfrak{v}_\varkappa(x)$ jene monotonen, für $x = -\infty$ verschwindenden Funktionen $V_\varkappa(x)$ einführt, für welche $V_\varkappa(b) - V_\varkappa(a)$ gleich dem von a bis b erstreckten Integral von $v_\varkappa(x)$, bzw. der von a bis b erstreckten Summe der $\mathfrak{v}_\varkappa(x)$ gleichkommt:

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} V_n(r_n u + b_n - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1}) dV_{n-1}(x_{n-1}) dV_{n-2}(x_{n-2}) \dots dV$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-x^2} dx, \tag{c}$$

wobei die Integrale links im Stieltjesschen Sinne zu bilden sind. Diese Gleichung (c) gilt gleichmäßig für *alle* Werte von u, ihre Geltung geht aber weit über das bisher Gesagte hinaus.

Definiert man nämlich $V_1(x)$, $V_2(x)$, $V_3(x)$, ... *ohne Rücksicht auf Eigenschaften ihrer Ableitungen*, als monotone, von null bis eins ansteigende Funktionen, die im wesentlichen nur der Bedingung genügen, daß die *Folge der „m-ten Momente"* $\int_{-\infty}^{\infty} x^m dV_\varkappa(x)$ *bei festem, aber beliebigem* m für $\varkappa = 1, 2, 3, \dots$ *beschränkt* ist, so läßt sich (c) immer noch beweisen, während weder (d) noch (e) einen Sinn hat (Behauptung III). Der Beweis ist aber keineswegs mehr durch Zurückführung auf (a) und (b) zu erbringen, sondern erfordert ganz andere Hilfsmittel, mit denen wir ihn in den §§ 4 und 5 im Anschluß an einen von Tschebyschef und Markoff eingeschlagenen Weg[2]) erledigen. Durch die gemeinschaftlichen Bemühungen dieser beiden Mathematiker ist tatsächlich ein Beweis von (c), unter Heranziehung der Theorie der Kettenbruch-Entwicklungen, wenigstens für die Fälle, in denen die $V_\varkappa$ beschränkte Ableitungen haben oder durch einfache Treppenlinien dargestellt werden, zustande gekommen; unser allgemeiner Beweis arbeitet dagegen nur mit elementaren und anschaulichen Hilfsmitteln. Für die Sätze (d) und (e), die nicht etwa aus (c)

---

[2]) Vgl. A. A. Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung, deutsch v. H. Liebmann, Leipzig 1912, S. 77ff., 259ff. P. L. Tschebyschef, Oeuvres, St. Pétersbourg 1899/1907, Bd. II. S 481. Vgl. a. Fußnote 7.

bgeleitet werden können, scheinen Beweise bisher noch nicht versucht worden zu sein.

In § 6 werden die in den vorstehenden Gleichungen (c) bis (e) angedeuteten Behauptungen III bis V durch einige Korollare ergänzt, die namentlich die Ausdehnung auf mehrere unabhängige Veränderliche und verschiedene Varianten der Voraussetzungen zum Gegenstande haben.

Die im *zweiten* Teil der Arbeit enthaltenen „*Anwendungen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*" führen zu zwei allgemeinen, hier als „Fundamentalsätzen" bezeichneten Ergebnissen, von denen das erste sich auf die Behauptungen III bis V, das zweite unmittelbar auf die Behauptungen I und II des ersten Teiles stützt. Man kann die beiden großen Problemgruppen, von denen die Fundamentalsätze handeln, im Anschluß an die übliche Terminologie, als den Bernoullischen und den Bayesschen Ideenkreis charakterisieren.

Bernoullis Fragestellung, gehörig erweitert, aber immer unter Verwendung der heutigen Ausdrucksweise dargestellt, geht dahin (§ 8): Welches ist die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses, das sich als die Summe sehr vieler, unabhängigen Zufallsgesetzen gehorchender, Einzelversuche darstellt? Der einfachste, von Bernoulli selbst behandelte Fall (§ 7, 2) ist bekanntlich der: Aus einer Urne, die lauter sonst gleiche, aber teils mit Null, teils mit Eins bezeichnete Kugeln im Mischungsverhältnis $(1-q):q$ enthält, wird in n-facher Wiederholung je eine Kugel gezogen; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{w}_n(x)$, wenn n eine sehr große Zahl ist, gerade die Summe x (also x mit Eins bezeichnete Kugeln) zu ziehen? Laplace hat die Frage dahin beantwortet, daß $\mathfrak{w}_n(x)$ bei großem n asymptotisch durch das „Gaußsche Gesetz" e^{-u^2} mit $u=\left(\frac{x}{n}-q\right)\sqrt{\frac{n}{2q\,(1-q)}}$ dargestellt wird. Unsere Gleichung (e), die in die Aussage des ersten Fundamentalsatzes eingeht, besagt, daß dieses Gesetz viel allgemeiner gilt: nicht nur (Poissonscher Fall), wenn jeder der n Züge aus einer anderen Urne (mit anderem Mischungsverhältnis) erfolgt (§ 7, 3), sondern auch dann, wenn jede Urne in beliebiger Mischung mit beliebigen Zahlen 0, 1, 2, 3, ... bezeichnete Kugeln enthält (§ 7, 4), endlich auch analog, wenn jede einzelne Ziehung durch eine endliche Gruppe von Zahlen charakterisiert wird (z. B. Fünfnummernziehung beim Zahlenlotto, § 7, 5). Grundsätzlich das gleiche Problem liegt in der *Fehlertheorie* vor, wenn nach der Wahrscheinlichkeitsdichte $w_n(x)$ für das Auftreten eines Fehlers x gefragt wird, der als die Summe von n, unabhängigen Fehlergesetzen genügenden, Elementarfehlern aufgefaßt wird (§ 8, 5). Hier sagt unsere Gleichung (d), die ebenfalls einen Teil des ersten Fundamentalsatzes bildet, daß, wie immer die Gesetze der Elementarfehler beschaffen sein mögen, bei genügend großem n das Gaußsche Gesetz für den Gesamt-

fehler resultiert. Endlich kann man Gleichung (c) heranziehen, um eine wenn auch eingeschränktere, Aussage für *beliebige* „Verteilungen" $V_x(x)$ zu gewinnen. Wendet man aber das Augenmerk lediglich auf den Umstand daß der Faktor von x^2 im Exponenten des Gaußschen Gesetzes mit $1 : n$ unendlich klein wird, so erhält man (§ 8, 6) das sog. *Gesetz der großen Zahl*, das wir das „erste" nennen, weil ihm in der Problemgruppe des zweiten Fundamentalsatzes ein analoges zur Seite tritt.

Überhaupt führt die Bayessche Fragestellung, deren Ausgestaltung im *zweiten* Fundamentalsatz (§ 10) ihren Ausdruck findet, zu zahlreichen Analogien mit den Folgerungen aus dem ersten. Das Ausgangsproblem ist folgendes (§ 9, 1): Man hat in n Zügen aus einer Urne mit schwarzen und weißen Kugeln an mal schwarz gezogen; gefragt ist nach der Wahrscheinlichkeitsdichte $w_n(x)$ dafür, daß die Wahrscheinlichkeit eines schwarzen Einzelergebnisses bei x liegt. Nach Laplace folgt $w_n(x)$ die sog. „a posteriori-Wahrscheinlichkeit", für große n asymptotisch dem Gaußschen Gesetz e^{-u^2} mit $u = (x-a)\sqrt{\frac{n}{2a(1-a)}}$, sobald die „a priori" Wahrscheinlichkeit aller x-Werte *gleich* angenommen wird. Unser zweiter Fundamentalsatz, der sich auf die Gleichungen (a), (b) und die zugehörigen Korollare stützt, besagt zunächst, daß dieses Ergebnis *von dem Verlauf der a priori-Wahrscheinlichkeiten ganz unabhängig* ist (§ 9, 2), wodurch erst seine große praktische Bedeutung begründet wird; weiter, daß die analogen Aussagen möglich sind, wenn die Urne in beliebiger Mischung nicht nur zweierlei, sondern *beliebig vielerlei*, etwa mit 0, 1, 2, 3, ... bezeichneten Kugeln enthält (§ 9, 3). Ein wichtiges Problem der *Fehlertheorie* fällt in diesen Ideenkreis (§ 10, 4): Man habe als Resultat von n Beobachtungen einer unbekannten Größe $a_1 n$ mal den Wert b_1, $a_2 n$ mal $b_2 \ldots a_k n$ mal b erhalten; wie groß ist die „Wahrscheinlichkeitsdichte a posteriori" $w_n(x)$ dafür, daß der „wahre" Wert der Beobachtung (d. i. derjenige, der sich als Durchschnitt bei einer ins Unendliche fortgesetzten Beobachtungsreihe ergeben müßte) bei x liegt? Der zweite Fundamentalsatz erteilt, in Erweiterung eines von Bienaymé bewiesenen Laplaceschen Satzes (§ 9, 4) die Antwort, daß — unabhängig von jeder Annahme über die a priori Wahrscheinlichkeiten — $w_n(x)$ bei großem n proportional e^{-u^2} wird, mit $u = (x-A) : s\sqrt{2}$, wo A den Mittelwert und s^2 die Streuung der n Beobachtungs-Ergebnisse $\left(A = \sum_m a_m b_m,\ s^2 = \sum_m a_m (b_m - A)^2\right)$ bedeutet. Dieses Resultat, das von der Annahme des Gaußschen Fehlergesetzes ganz unabhängig ist, aus dieser Annahme aber auch keineswegs abgeleitet werden könnte, nennen wir den *zweiten Satz der Fehlertheorie* (§ 10, 4). Endlich ergibt sich (§ 10, 5) aus der Bemerkung, daß in der

Laplace-Bayesschen Formel der Faktor von x^2 im Exponenten mit n wächst, das schon erwähnte *zweite Gesetz der großen Zahl*, dessen einfache Formulierung man am Schlusse dieser Arbeit findet.

Die präzise Darstellung der Fundamentalsätze erforderte, wie oben bemerkt wurde, die Einführung einer ganzen Reihe neuer Begriffe und Bezeichnungen, die nach Ansicht des Verfassers bei einem logischen Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung *als eines Teiles der Mathematik* nicht entbehrt werden können. Da die darauf bezüglichen Erklärungen und Bemerkungen im Texte (§ 8, 1—3 und § 10, 1—2) ohnehin so kurz als möglich gehalten wurden, erübrigt sich eine auszugsweise Wiedergabe an dieser Stelle. Der wesentliche Inhalt der Sätze und ihrer Anwendungen bleibt natürlich von der Annahme oder Ablehnung des vorgebrachten Systems von „Grundlagen" unabhängig.

I. Teil. Analytische Entwicklungen.

§ 1. Sätze über den Grenzwert eines Produktes von Funktionen.

1. Bezeichnungen. Es seien $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... reelle oder komplexe Funktionen der reellen Variablen x, eindeutig definiert für alle, endlichen oder unendlichen, reellen Werte von x. Es mögen ferner x_1, x_2, x_3, ... reelle Zahlen bezeichnen, die in einer bestimmten, noch anzugebenden Weise *linear* von einer einzigen reellen Zahl u abhängen. Wir betrachten das Produkt

$$p_n(u) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \dots f_n(x_n) \tag{1}$$

sowie sein bestimmtes Integral

$$P_n(a,b) = \int_a^b p_n(u)\,du \tag{2}$$

und untersuchen insbesondere die Grenzwerte

$$p(u) = \lim_{n=\infty} p_n(u) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \dots \tag{1'}$$

und

$$P(a,b) = \lim_{n=\infty} P_n(a,b) = \lim_{n=\infty} \int_a^b p_n(u)\,du, \tag{2'}$$

wobei naturgemäß die $f_\varkappa$ gewissen Beschränkungen unterworfen werden. Diese Produktbildung genügt dem kommutativen Gesetz (Vertauschbarkeit der Faktoren), dagegen dem assoziativen (beliebige Zusammenfaßbarkeit der Faktoren) nur unter Einschränkungen für die Beziehung zwischen u und den $x_\varkappa$, die wir nicht als erfüllt annehmen.

2. Voraussetzungen. a) Von *jeder einzelnen* der Funktionen f_1, f_2, f_3, ... setzen wir voraus:

1. Die Funktion $f_\varkappa(x)$ habe an einer im Endlichen gelegenen bestimmten Stelle $x = a_\varkappa$ den *reellen Wert* 1 und sei hier zweimal differenzierbar; der erste Differentialquotient sei *null*, der zweite *reell, endlich* und *nicht positiv*:

$$(a\,1) \qquad f_\varkappa(a_\varkappa) = 1, \quad f_\varkappa'(a_\varkappa) = 0, \quad f_\varkappa''(a_\varkappa) = -2s_\varkappa^2.$$

2. Der Betrag des *dritten Differenzenquotienten* von $f_\varkappa(x)$ und damit der des ersten von $f_\varkappa''(x)$ habe an der Stelle $x = a_\varkappa$ eine *endliche obere Schranke*. Danach gilt für die Funktion

$$(3) \qquad \vartheta_\varkappa(y) = \frac{\log \text{nat}\, f_\varkappa(a_\varkappa + y) + s_\varkappa^2 y^2}{y^2},$$

die zufolge (a 1) an der Stelle $x = a_\varkappa$ den Grenzwert null annimmt, bei hinreichend kleinem $y_0 > 0$, für ein bestimmtes endliches $C_\varkappa'$:

$$(a\,2) \qquad |\vartheta_\varkappa(y)| < C_\varkappa' |y|, \text{ für } |y| < y_0.$$

3. An allen Stellen, die von $a_\varkappa$ verschieden sind, sei der Absolutwert von $f_\varkappa(x)$ *kleiner als* 1 und habe auch nicht den Grenzwert 1. Es existiert also zu jedem, noch so klein vorgegebenen Y_0 ein positives $\delta_\varkappa$, so daß

$$(a\,3) \qquad |f_\varkappa(a_\varkappa + y)| < 1 - \delta_\varkappa \quad \text{für} \quad |y| > Y_0.$$

Es genügt übrigens, daß diese Ungleichung für alle y mit Ausnahme einer Menge vom Inhalt null besteht.

4. Für $x = +\infty$ und $x = -\infty$ verschwinde $|f_\varkappa(x)|$ mit einer positiven Potenz von $\frac{1}{x}$, d. h. es gibt ein $\alpha_\varkappa > 0$ derart, daß für genügend großes $X_\varkappa$:

$$(a\,4) \qquad |x^{\alpha_\varkappa} f_\varkappa(x)| < 1 \text{ für } |x| > X_\varkappa.$$

b) Von der *Gesamtheit* der Funktionen f_1, f_2, f_3, ... setzen wir voraus:

1. Die Folgen der Zahlen a_1, a_2, a_3, ... und s_1^2, s_2^2, s_3^2, ... seien *beschränkt*, die Summe der letzteren wachse aber *stärker als mit der* $^2/_3$ *Potenz* von n ins Unendliche, d. h. es gebe zwei positive endliche Zahlen A, S^2 und eine für $n = \infty$ verschwindende Funktion $\varepsilon(n) > 0$, so daß für alle $\varkappa$

$$(b\,1) \qquad |a_\varkappa| < A, \quad |s_\varkappa^2| < S^2, \quad \frac{n^{\frac{2}{3}}}{\sum_{\varkappa=1}^{n} s_\varkappa^2} < \varepsilon(n).$$

2. Es gebe *ein von* $\varkappa$ *unabhängiges* C', so daß für alle $\varkappa$, bei hinreichend kleinem y_0:

$$(b\,2) \qquad |\vartheta_\varkappa(y)| < C' |y| \quad \text{für} \quad |y| < y_0.$$

Hieraus folgt u. a., daß das arithmetische Mittel $\frac{1}{n}\sum_{\varkappa=1}^{n}\vartheta_\varkappa(y)$ im Be-
eich $|y| < y_0$ beschränkt ist und stetig mit y gegen null geht.

3. Es gebe *ein von $\varkappa$ unabhängiges positives δ*, so daß für alle $\varkappa$,
ei beliebig vorgegebenem Y_0:

$$|f_\varkappa(a_\varkappa + y)| < 1 - \delta \quad \text{für} \quad |y| > Y_0,$$

öchstens mit Ausnahme einer Menge von y-Werten vom Inhalt null.

4. Es gebe *ein von $\varkappa$ unabhängiges* X und ein ebensolches $\alpha > 0$,
daß für alle $\varkappa$

$$|x^\alpha f_\varkappa(x)| < 1 \quad \text{für} \quad |x| > X.$$

Man sieht ohne weiteres, daß, wenn alle $f_\varkappa$ untereinander gleich sind,
ie Voraussetzungen b) in den a) enthalten sind. Allgemein kann man
agen, daß durch die b) eine gewisse *Gleichmäßigkeit* in der Erfüllung
er a) gefordert wird.

3. Behauptungen. I. *Genügen die $f_1, f_2, f_3, \ldots$ den eben angeführten
oraussetzungen* (a 1), (a 2) und (b 1), (b 2) *und setzt man*

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + \ldots + s_n^2 = r_n^2, \quad x_\varkappa = a_\varkappa + \frac{u}{r_n}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

gilt für die mit (1) *und* (1′) *definierte Funktion $p(u)$*

$$p(u) = e^{-u^2}$$

jedem endlichen Bereich von u. Oder ausführlicher: *Es läßt sich stets
in n_0 finden, so daß*

$$|f_1\left(a_1 + \tfrac{u}{r_n}\right) \cdot f_2\left(a_2 + \tfrac{u}{r_n}\right) \cdots f_n\left(a_n + \tfrac{u}{r_n}\right) - e^{-u^2}| < \varepsilon$$
$$\text{für} \quad |u| < u_0, \quad n > n_0$$

ei beliebig vorgegebenem ε und u_0.

II. *Genügen die Funktionen $f_1, f_2, f_3, \ldots$ sämtlichen Voraussetzungen
a 1) bis* (a 4) *und* (b 1) *bis* (b 4), *sind sie überdies integrabel und haben
ie $s_\varkappa^2$ eine von null verschiedene untere Schranke s^2, so gilt auch für die
(2) und* (2′) *definierte Funktion $P(a, b)$*

$$P(a, b) = \int_a^b e^{-u^2}\, du$$

ir beliebige endliche oder unendliche a, b. Oder ausführlicher: *Es gibt
ets ein n_0, so daß*

$$\left|\int_a^b f_1\left(a_1 + \tfrac{u}{r_n}\right) \cdot f_2\left(a_2 + \tfrac{u}{r_n}\right) \cdots f_n\left(a_n + \tfrac{u}{r_n}\right) du - \int_a^b e^{-u^2} du\right| < \varepsilon \text{ für } n > n_0$$

bei beliebig vorgegebenem ε und endlichen oder unendlichen a, b. Zugleich gilt auch Gl. (I) *bzw.* (I′) *für die ganze u-Achse, höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge von Punkten.*

Man sieht leicht ein, daß die Festsetzung (4) die Bedeutung hat, für jedes n

$$p_n(0) = 1, \quad p_n'(0) = 0, \quad p_n''(0) = -2 \tag{4'}$$

zu bewirken. Denn es ist mit Rücksicht auf (a 1)

$$p_n(0) = f_1(a_1) \cdot f_2(a_2) \dots f_n(a_n) = 1;$$

ferner

$$p_n'(0) = \frac{1}{r_n} \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{p_n(0)}{f_\varkappa(a_\varkappa)} f_\varkappa'(a_\varkappa) = 0;$$

endlich

$$p_n''(0) = \frac{1}{r_n^2} \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{p_n(0)}{f_\varkappa(a_\varkappa)} f_\varkappa''(x_\varkappa) = -\frac{2}{r_n^2} \sum_{\varkappa=1}^{n} s_\varkappa^2 = -2.$$

4. Beweis der ersten Behauptung. Aus der Definition von ϑ in Gleichung (3) folgt:

$$\log \text{nat}\, f_\varkappa(a_\varkappa + y) = -s_\varkappa^2 y^2 + y^2 \vartheta_\varkappa(y). \tag{5}$$

Setzt man hier $y = u : r_n$ und summiert die Gleichungen für $\varkappa = 1$ bis n, so erhält man mit Rücksicht auf (1) und (4):

$$\log \text{nat}\, p_n(u) = -u^2 + \frac{u^2}{r_n^2} \sum_{\varkappa=1}^{n} \vartheta_\varkappa\left(\frac{u}{r_n}\right). \tag{5'}$$

Für den Absolutwert des zweiten Summanden rechts hat man nach Voraussetzung (b 1) und (b 2):

$$\left| \frac{u^2}{r_n^2} \sum \vartheta_\varkappa\left(\frac{u}{r_n}\right) \right| < C' n \left| \frac{u^3}{r_n^3} \right| < C' u_0^3 [\varepsilon(n)]^{\frac{3}{2}}, \tag{5''}$$

vorausgesetzt, daß $|u : r_n| < y_0$ bleibt. Dies letztere läßt sich für $|u| < u_0$ da r_n nach (b 1) mit n ins Unendliche wächst, durch Vergrößerung von n erreichen, womit also gezeigt ist, daß

$$|\log \text{nat}\, p_n(u) + u^2| < \varepsilon', \quad \text{für} \quad |u| < u_0, \tag{5'''}$$

bei hinreichend großem n. Aus (5‴) folgt, daß $p_n e^{u^2}$ sich beliebig wenig von 1 unterscheidet, wenn nur n groß genug ist, und daraus die Behauptung I.

Man sieht, daß die Behauptung I lediglich auf dem Verhalten der Funktionen $f_\varkappa$ *in der Umgebung der Stellen* $a_\varkappa$ beruht.

5. Hilfssatz. Ehe wir zum Beweis der zweiten Behauptung übergehen, erledigen wir folgenden Hilfssatz. *Sei $\eta(u)$ eine, im allgemeinen komplexe, Funktion der reellen Variablen u, deren Absolutwert die Größe η_0 zur oberen Schranke hat. Dann gibt es zu jedem vorgegebenen ε ein $u_0 > 0$ und ein $\eta_0 < \frac{1}{2}$, so daß*

$$5) \quad \left| \int_0^U e^{-u^2[1+\eta(u)]} du - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad |\eta(u)| \leqq \eta_0 \quad \text{und} \quad U > u_0.$$

Beweis: Sei $\alpha(u)$ der reelle Bestandteil von $\eta(u)$, so daß auch $|\alpha(u)| \leqq \eta_0$, so ist

$$|e^{-u^2(1+\eta)}| = |e^{-u^2(1+\alpha)}| \leqq e^{-u^2(1-\eta_0)}.$$

Daraus folgt für beliebiges u_0 und $\eta_0 < 1$:

$$5') \quad \left| \int_{u_0}^{\infty} e^{-u^2(1+\eta)} du \right| < \int_{u_0}^{\infty} e^{-u^2(1-\eta_0)} du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-\eta_0}} [1 - \Phi(u_0\sqrt{1-\eta_0})],$$

wenn Φ das Gaußsche Integral

$$7) \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-u^2} du$$

bezeichnet. Da bekanntlich $\Phi(x)$ mit $x = \infty$ monoton gegen 1 geht, kann man ein u_0 so wählen, daß, etwa für $\eta_0 = \frac{1}{2}$, und um so mehr für $\eta_0 < \frac{1}{2}$, der Ausdruck rechts in $(6')$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$ wird. Dann gilt für den Integranden in (6) bei $\eta_0 \leqq \frac{1}{2}$:

$$6'') \quad \left| \int_0^U - \int_0^{u_0} \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für} \quad U > u_0$$

und überdies, da auch $\eta_0 = 0$ gesetzt werden darf:

$$6''') \quad \left| \int_0^{u_0} e^{-u^2} du - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

weil $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ der Wert des von null bis $+\infty$ erstreckten Integrals von e^{-u^2} ist.

Bezeichnet man mit $e_1(u)$ und $i\,e_2(u)$ den reellen bzw. komplexen Bestandteil von $e^{-u^2\eta(u)}$, so folgt aus dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung:

$$\int_0^{u_0} e^{-u^2[1+\eta(u)]} du = [e_1(u_1) + i\,e_2(u_2)] \int_0^{u_0} e^{-u^2} du \qquad \begin{cases} 0 < u_1 < u_0 \\ 0 < u_2 < u_0 \end{cases}$$

Da man durch Herabdrücken von η_0 unter $\frac{1}{2}$ den Faktor vor dem Integralzeichen rechts beliebig nahe der reellen Einheit bringen kann, so ergibt sich weiter, daß durch entsprechende Wahl von η_0 — nach erledigter Verfügung über u_0 —

$$(6'''') \qquad \left|\int_0^{u_0} e^{-u^2[1+\eta(u)]}du - \int_0^{u_0} e^{-u^2}du\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

gemacht werden kann. Durch Addition von (6″), (6‴) und (6⁗) folgt (6) und damit der Hilfssatz.

6. Beweis der zweiten Behauptung. Für endliche a, b läßt sich die Gleichung (II) aus der Behauptung I in einfachster Weise, etwa mit Hilfe des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung, ableiten. Es genügt demnach, Gleichung (II) für den Fall $a = 0$, $b = \infty$ zu beweisen, da der Beweis für $a = -\infty$, $b = 0$ in ganz gleicher Weise zu führen ist. Wir haben also zu zeigen, daß

$$(8) \qquad \left|\int_0^{\infty} p_n(u)du - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right| < \varepsilon$$

wird, bei hinreichend großem n und bei der durch (1) und (4) festgelegten Bedeutung von $p_n(u)$. Zu diesem Zweck zerlegen wir das Intervall $0, \infty$ durch noch näher zu bestimmende Zwischenwerte U und U' in drei Teile und zeigen, daß bei entsprechender Wahl von U und U' für hinreichend große n:

$$(8') \qquad \left|\int_0^{U} p_n(u)\,du - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right| < \varepsilon',$$

$$(8'') \qquad \left|\int_U^{U'} p_n(u)du\right| < \varepsilon'',$$

$$(8''') \qquad \left|\int_{U'}^{\infty} p_n(u)du\right| < \varepsilon'''.$$

Um zunächst (8′) zu beweisen, beachten wir, daß nach (5′)

$$(9) \qquad p_n(u) = e^{-u^2[1+\eta(u)]} \quad \text{mit} \quad \eta(u) = -\frac{1}{r_n^2}\sum_{\varkappa=1}^{n}\vartheta_\varkappa\left(\frac{u}{r_n}\right).$$

Nach dem oben dargelegten Hilfssatz bestimmen wir u_0 und η_0 zu dem in (8′) vorgeschriebenen ε'. Zufolge der Voraussetzung (b2) und wegen $s_\varkappa^2 > s^2$ gilt für das in (9) definierte $\eta(u)$

$$(9') \qquad |\eta(u)| < \left|C' n \frac{u}{r_n^3}\right| \leqq \frac{C'}{s^2}\frac{u_0}{r_n}, \quad \text{für} \quad \left|\frac{u_0}{r_n}\right| \leqq y_0$$

Wir können also $|\eta(u)| < \eta_0$ erreichen, indem wir ein n_0 so groß wählen, daß $u_0 : r_{n_0}$ erstens kleiner wird als das nach (b2) bestimmte y_0 und zweitens kleiner als $\eta_0 s^2 : C'$. Damit ist (8′) zunächst für $n \geqq n_0$ und $U = u_0$ bewiesen; die Gleichung gilt aber auch zufolge des im vorausgehenden Abschnitt bewiesenen Hilfssatzes für größere U, wenn nur der Quotient

$U : r_n$ durch entsprechende Vergrößerungen von n unter $u_0 : r_{n_0}$ gehalten wird, weil dabei $|\eta|$ unter η_0 bleibt. Also ist allgemein:

$$9'') \qquad \Big|\int_0^{r_n y_0} p_n(u)\,du - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\Big| < \varepsilon' \quad \text{für} \quad n > n_0,$$

bei einem durch ε' und die Funktionen $f_1, f_2, f_3, \ldots$ bestimmten, endlichen y_0 (das nicht mit dem y_0 von (b2) identisch sein muß).

In das Integral (8″) führen wir an Stelle von u die neue Integrationsvariable y durch $u = r_n y$ ein und erhalten so:

$$10) \qquad r_n \int_{y_0}^{y_1} p_n(r_n y)\,dy = r_n \int_{y_0}^{y_1} f_1(a_1 + y)\cdot f_2(a_2 + y)\ldots f_n(a_n + y)\,dy,$$

wenn mit y_1 der zu U' gehörige Wert $U' : r_n$ bezeichnet wird. In (10) ist $|y|$ stets größer als y_0, es gibt also nach Voraussetzung (b 3) ein positives δ, so daß $|f_\varkappa| < 1 - \delta$. Daher ist nach dem Mittelwertsatz der Absolutwert von (10) kleiner als

$$10') \qquad r_n(y_1 - y_0)(1 - \delta)^n < \sqrt{n}\cdot S\cdot(y_1 - y_0)\cdot(1 - \delta)^n,$$

wobei S die in (b 1) eingeführte obere Schranke der $|s_\varkappa|$. Die Nullmenge, in der die Ungleichung (b 3) für $f_\varkappa$ etwa nicht erfüllt ist, kommt bei der Integration nicht in Betracht. Für hinreichend große n wird (10′) beliebig klein, so daß für ein gewisses n'

$$10'') \qquad \Big|\int_{r_n y_0'}^{r_n y_1} p_n(u)\,du\Big| < \varepsilon'' \quad \text{für} \quad n > n'$$

gilt, bei beliebigen endlichen y_0, y_1.

Mit dem Integral (8‴) verfahren wir zunächst in gleicher Weise und schreiben dafür

$$11) \qquad r_n \int_{y_1}^{\infty} p_n(r_n y)\,dy = r_n \int_{y_1}^{\infty} f_1(a_1 + y)\cdot f_2(a_2 + y)\ldots f_n(a_n + y)\,dy.$$

Nun treffen wir die noch offene Wahl von y_1, indem wir $y_1 > A + X$ setzen, wobei A und X die in Voraussetzung (b 1) bzw. (b 4) eingeführten Größen bezeichnen. Es ist dann $|a_\varkappa + y| > X$ für alle Werte des Integrationsbereiches von (11), daher nach Voraussetzung (b 4) der Absolutwert von (11) kleiner als

$$11') \qquad r_n \int_{y_1}^{\infty} |(a_1 + y)(a_2 + y)\ldots(a_n + y)|^{-\alpha}\,dx < r_n \int_{y_1}^{\infty} (y - A)^{-n\alpha}\,dy$$

$$< \sqrt{n}\cdot S\cdot \frac{(y_1 - A)^{-n\alpha+1}}{n\alpha - 1}.$$

Da der Ausdruck rechts mit wachsendem n unter jeden Betrag sinkt, ist damit bewiesen, daß für ein gewisses n''

$$(11'') \qquad \left|\int_{r_n y_1}^{\infty} p_n(u)\,du\right| < \varepsilon''' \quad \text{für} \quad n > n''$$

gilt, bei der oben eingeführten Verfügung über y_1.

Die Gleichungen (9''), (10'') und (11'') sind gleichwertig mit (8'') bis (8''') und diese geben zusammen (8), womit der Beweis für die Behauptung II über den Grenzwert eines Produktes von Funktionen erbracht ist.

§ 2. Korollare zu den Sätzen des § 1.

1. Schwächere und stärkere Divergenz von $\Sigma s_\varkappa^2$. In unserer Beweisführung für die erste Behauptung des § 1 war es wesentlich, daß die Summe $r_n^2 = s_1^2 + s_2^2 + \ldots s_n^2$ (d. i. bis auf einen Faktor die Summe der zweiten Ableitungen der $f_\varkappa$ an den ausgezeichneten Stellen $a_\varkappa$) stärker als mit der $\frac{2}{3}$ Potenz von n ins Unendliche geht (dritte der unter (b 1) zusammengefaßten Voraussetzungen). Man kann aber auch zulassen, daß r *schwächer wächst*, etwa mit der Potenz n^μ, $\mu < \frac{2}{3}$, wenn dafür die unter (a 2) und (b 2) gemachten Voraussetzungen verschärft werden. Denn es kommt nur darauf an — siehe Gleichung (5'') des § 1 —, daß

$$(1) \qquad \frac{1}{r_n^3} \sum_{\varkappa=1}^{n} \vartheta_\varkappa\left(\frac{u}{r_n}\right)$$

für $|u| < u_0$ mit wachsendem n gegen null geht. Nimmt man an, daß für jede einzelne der Funktionen $\vartheta_\varkappa(y)$ mit $r_\varkappa > 0$

$$(a2') \qquad |\vartheta_\varkappa(y)| \leqq C_\varkappa' |y|^{r_\varkappa} \quad \text{für} \quad |y| < y_\varkappa$$

und für die ganze Folge der $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \ldots$ mit $\nu > 0$

$$(b2') \qquad |\vartheta_\varkappa(y)| \leqq C' |y|^\nu \quad \text{für} \quad |y| < y_0$$

gilt, so sieht man, daß (1) mit wachsendem n verschwindet, sobald nun $\mu > \frac{2}{\nu+2}$. Andrerseits geht der Betrag von (1), da jedes $\vartheta_\varkappa(y)$ an der Stelle $y = 0$ stetig ist, auch dann mit wachsendem n gegen null, wenn r mit der ersten Potenz von n wächst und die Stetigkeit der $\vartheta_\varkappa(y)$ als *gleichmäßig* vorausgesetzt wird. Wir haben so den Satz

I_1. *Man kann die dritte der Voraussetzungen* (b 1) *durch*

$$(2) \qquad \frac{n^{\frac{2}{\nu+2}}}{\sum_{\varkappa=1}^{n} s_\varkappa^\nu} \leqq e(n), \qquad \nu > 0,$$

setzen, wo $\varepsilon(n)$ eine mit $n = \infty$ verschwindende Größe bezeichnet, wenn leichzeitig die Voraussetzungen (a2) *und* (b2) *durch die obenstehenden* 2′) *bzw.* (b2′) *ersetzt werden; gilt aber statt* (2) *die Voraussetzung, aß r_n^2 mit n wächst (also z. B. eine von null verschiedene untere Schranke er $s_\varkappa^2$ existiert wie im Falle der Behauptung II), so kann man* (a2) *anz fortlassen und an Stelle von* (b2) *fordern, daß zu einem beliebig orgegebenen $\Theta > 0$ ein y_0 existiert, so daß für alle $\varkappa$*

$$|\vartheta_\varkappa(y)| < \Theta \quad \text{bei} \quad |y| \leqq y_0 \tag{b2*}$$

ilt.

Von diesem Korollar wird man insbesondere dann Anwendung machen, enn die $f_\varkappa$ an den ausgezeichneten Stellen „gleichmäßig" regulär sind, so aß die $\vartheta_\varkappa(y)$ durch Potenzreihen mit einer gemeinschaftlichen Majoranten arstellbar sind.

2. Veränderte Bedingungen für $f_\varkappa$ im Unendlichen. Die in 4) und (b4) gestellte Forderung für das Verhalten der $f_\varkappa$ im Unendchen kann. wie der Gang des Beweises von II zeigt, gemildert werden. s genügt z. B., an Stelle von (b4) vorauszusetzen, daß $\sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_\varkappa$ etwa mit $\overline{n}$ ins Unendliche wächst, wenn $\alpha_\varkappa$ die mit (a4) eingeführten Exponenten ezeichnet — s. Gl. (11′) von § 1. Andrerseits kann man den Satz II weitern, indem man das Produkt $p_n(u)$ statt über du, über $\psi(u)\,du$ tegriert, wobei $\psi(u)$ von entsprechendem Verhalten im Unendlichen sein uß. Es ergibt sich so folgender Satz

II_2. *Bedeutet $\psi(u)$ eine für alle reellen Werte von u definierte, in dem endlichen Intervall integrable Funktion und tritt an Stelle der oraussetzungen* (a4) *und* (b4) *die Bedingung, daß*

$$\lim_{X=\infty} \int_X^\infty |p_n(u)\psi(u)\,du| = 0 \tag{3}$$

ei hinreichend großem X, so gilt

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b p_n(u)\,\psi(u)\,du = \int_a^b e^{-u^2}\psi(u)\,du \tag{II_2}$$

ir alle endlichen oder unendlichen a, b. Ist $\psi(u)$ beschränkt, so gilt II_2) *unter den Bedingungen des* § 1. Von diesem Korollar machen wir § 3 zum Beweis der Behauptungen IV und V Gebrauch. Setzt man (3) $\psi = 1$, so hat man hierin die allgemeinste Form der an Stelle on (a4) und (b4) zulässigen Bedingung für den Satz II.

Eine analoge Abänderung gestattet übrigens auch die Bedingung (a3)

bzw. (b3), da es hier nur auf das Kleinwerden des *Produktes* und nicht auf das der einzelnen Faktoren ankommt.

3. Erweiterung durch Einführung einer Dichtefunktion $\psi(y)$. Eine für die Anwendung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung sehr wesentliche Erweiterung erfahren die Behauptungen des § 1, wenn, ähnlich wie in dem eben behandelten Fall, ein Faktor zu $p_n(u)$ hinzutritt, der aber jetzt nicht als Funktion von u, sondern als Funktion $\psi(y)$ von $y = u : r_n$ gegeben sei. Da, wie wir gesehen haben, der *Wert* von $p(u)$ in jedem endlichen Bereich von u, und der von $P(a, b)$, wenn die entsprechenden Voraussetzungen erfüllt sind, in jedem Bereich der a, b überhaupt, nur von dem Verhalten der $f_\varkappa$ in der Umgebung von $y = 0$ abhängt, ist es klar, daß es jetzt auch im wesentlichen nur auf $\psi(0)$ bzw. das Verhalten von ψ für kleine y ankommen kann. Die Beweise des § 1 lassen sich fast unverändert für folgenden erweiterten Satz führen:

I_3, II_3. *Es bedeute $\psi(y)$ eine im ganzen Bereich der reellen Achse definierte, beschränkte Funktion von y, die für $y = 0$ stetig ist; dann gilt für die mit* (1) *und* (4) *in* § 1 *definierte Funktion $p_n(u)$:*

$$(I_3) \qquad \lim_{n=\infty} \left[\psi\left(\frac{u}{r_n}\right) \cdot p_n(u)\right] = \psi(0)\, e^{-u^2}$$

für jeden endlichen Bereich $|u| < u_0$ unter den Voraussetzungen des Satzes I; *und*

$$(II_3) \qquad \lim_{n=\infty} \int_a^b \psi\left(\frac{u}{r_n}\right) \cdot p_n(u)\, du = \psi(0) \int_a^b e^{-u^2} du$$

für alle endlichen oder unendlichen a, b unter den Voraussetzungen des Satzes II

Man muß nur beachten, daß aus der Stetigkeit von ψ folgt, daß $|\psi(y) - \psi(0)|$ kleiner als jeder vorgegebene Betrag gemacht werden kann, wenn nur $|y| < y_0$ und y_0 hinreichend klein gewählt wird. Nun hindert aber nichts, die in § 1, 6 mit y_0 bezeichnete Größe beliebig klein zu wählen; durch Vergrößerung von n wird das zugehörige $u_0 = r_n y_0$ hinreichend vergrößert. Außerhalb des Bereiches $|u| < u_0$ — was nur für die Behauptung II in Frage kommt — wird aber $p_n(u)$ oder wenigstens das Integral über $p_n(u)$ nach § 1, 6 so klein, daß der Wert des Faktors $\psi(u : r_n)$ überhaupt gleichgültig ist, wofern er endlich bleibt.

4. Funktionen mehrerer Variablen. Die beiden Behauptungen von § 1 lassen sich auch auf den — für die Anwendung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung sehr wichtigen — Fall ausdehnen, in dem die $f_\varkappa$ von *mehreren* reellen Veränderlichen $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$ abhängen und dabei

nlichen Bedingungen unterworfen sind wie den in § 1 angeführten. ie Grenzübergänge sind genau dieselben wie im Falle einer Variablen nd brauchen hier nicht wiederholt zu werden. Nur einige formale Rechungen sind erforderlich. Zunächst folgende Bemerkung:

Wenn wir in die Aussage I an Stelle von u die Variable $y = u : r_n$ nführen, so nimmt sie die Form an:

$$\lim_{n=\infty} [f_1(a_1 + y) \cdot f_2(a_2 + y) \dots f_n(a_n + y)] = e^{-r_n^2 y^2}.$$

iese Gleichung gilt, wie wir gezeigt haben, wenn hinzugefügt wird, aß beim Grenzübergang nicht etwa y, sondern $r_n y = u$ konstant zu alten ist. (Für konstantes y ist die Aussage trivial, da beide Seiten gegen ull gehen bzw. gleich 1 sind.) Unsere Ableitung wäre aber ganz unändert geblieben, wenn wir statt u eine andere Variable, die sich von u urch einen *endlich bleibenden Faktor* unterscheidet, gewählt hätten. Setzen ir z. B. in der Annahme, daß r_n^2 mindestens mit n wächst (wie es für II verngt ist) also daß $r_n^2 : n > s^2$,

$$\frac{r_n}{\sqrt{n}} = h_n, \qquad z = \frac{u}{h_n} = \sqrt{n}\, y,$$

folgt aus unserer Annahme und der zweiten Ungleichung (b1):

$$s^2 < h_n^2 < S^2.$$

s gilt somit auch

$$\lim_{n=\infty} \left[f_1\left(a_1 + \frac{z}{\sqrt{n}}\right) \cdot f_2\left(a_2 + \frac{z}{\sqrt{n}}\right) \cdots f_n\left(a_n + \frac{z}{\sqrt{n}}\right) \right] = e^{-h_n^2 z^2}$$

ei festgehaltenem z, und analog die Behauptung II.

Dies vorausgeschickt, sei jetzt $f_\varkappa$ Funktion der k Variablen $x^{(\iota)}$, oder, ie wir kürzer schreiben wollen, des k-dimensionalen Vektors $\bar{x}$; sie habe n der Stelle $\bar{x} = \bar{a}_\varkappa$ d en Wert 1 und sei hier zweimal differenzierbar; die sten Differentialquotienten seien null, die zweiten durch die reelle atrix $s_\varkappa$ gegeben, nämlich:

$$\frac{\partial^2 f_\varkappa}{\partial x^{(\iota)} \partial x^{(\lambda)}} = -2 s_\varkappa^{(\iota,\lambda)}, \qquad (\iota, \lambda = 1, 2, \dots, k).$$

er früheren Bedingung, daß $s_\varkappa^2$ nicht negativ sein durfte, entspricht jetzt e Forderung, daß die quadratische Form $\sum_{\iota,\lambda} s_\varkappa^{(\iota,\lambda)} y^{(\iota)} y^{(\lambda)}$ nicht negativ ird. Geometrisch heißt das, daß $\bar{x} = \bar{a}_\varkappa$ ein *elliptischer* oder mindestens *arabolischer* Punkt der Fläche $f_\varkappa$ ist, dessen hohle Seite nach unten gechtet ist. Die Rolle der in Gl. (3) des § 1 definierten Funktion $\vartheta_\varkappa(y)$ ernimmt jetzt die Funktion

$$(5') \qquad \frac{\log \operatorname{nat} f_\varkappa(\bar a_\varkappa + \bar y) + \sum_{\iota,\lambda} s_\varkappa^{(\iota,\lambda)} y^{(\iota)} y^{(\lambda)}}{\sum_\iota y^{(\iota)2}} = \vartheta_\varkappa(\bar y),$$

wo die Summationen von 1 bis k zu erstrecken sind. Zufolge (5) nähert sich $\vartheta_\varkappa$ mit $y^{(\iota)} = 0$ $(\iota = 1, 2, \ldots, k)$ dem Grenzwert null, und wir setzen wie in (b2*) voraus, daß alle $\vartheta_\varkappa$ sich *gleichmäßig* stetig verhalten. Bei Addition der für $\varkappa = 1, 2, \ldots, n$ angeschriebenen Gleichungen (5′) entstehen die Ausdrücke

$$(5'') \qquad r_n^{(\iota,\lambda)} = \sum_{\varkappa=1}^{n} s_\varkappa^{(\iota,\lambda)},$$

von denen wir im Sinne des ersten Korollars voraussetzen wollen, daß sie sich nur durch nicht verschwindende, für alle n endliche Faktoren $h_n^{(\iota,\lambda)}$ von n unterscheiden:

$$(5''') \qquad \frac{r_n^{(\iota,\lambda)}}{n} = h_n^{(\iota,\lambda)}$$

und daß *die mit ihnen gebildete quadratische Form positiv definit sei.* Hierauf führt dieselbe Überlegung wie die in § 1, 4 angestellte analog (4‴) zu dem Satz:

$$(\mathrm{I}_4) \quad \lim_{n=\infty} \left[f_1\left(\bar a_1 + \frac{\bar z}{\sqrt{n}}\right) \cdot f_2\left(\bar a_2 + \frac{\bar z}{\sqrt{n}}\right) \cdots f_n\left(\bar a_n + \frac{\bar z}{\sqrt{n}}\right) \right] = e^{-\sum_{\iota,\lambda} h_n^{(\iota,\lambda)} z^{(\iota)} z^{(\lambda)}}$$

Genügen die $f_\varkappa$ überdies den leicht auf den Fall mehrerer Variabler übertragbaren Bedingungen (a3), (a4) und (b3), (b4), so gilt auch das Analogon zu (II):

$$(\mathrm{II}_4) \quad \lim_{n=\infty} \int_{(Z)} f_1\left(\bar a_1 + \frac{\bar z}{\sqrt{n}}\right) \cdot f_2\left(\bar a_2 + \frac{\bar z}{\sqrt{n}}\right) \cdots f_n\left(\bar a_n + \frac{\bar z}{\sqrt{n}}\right) dZ = \int_{(Z)} e^{-\sum_{\iota,\lambda} h_n^{(\iota,\lambda)} z^{(\iota)} z^{(\lambda)}}$$

wobei die Integrale über einen endlichen oder unendlichen Teil des Raumes mit dem Element $dZ = dz^{(1)} \cdot dz^{(2)} \ldots dz^{(n)}$ zu erstrecken sind. Wir kommen so zu dem Ergebnis:

I_4, II_4. *Wenn die Funktionen $f_\varkappa$ der k reellen Variablen $x^{(\iota)}$ $(\iota = 1, 2, \ldots, k)$ den hier angedeuteten, durch Übertragung von* (a1) *bis* (a4) *und* (b1) *bis* (b4) *aus* § 1 *hervorgehenden Forderungen genügen, gelten die obenstehenden, zu* (I′) *und* (II′) *analogen Gleichungen* (I_4) *und* (II_4).

Natürlich lassen auch die im vorliegenden Paragraph erörterten Abänderungen und Erweiterungen sinngemäß Anwendung auf den Fall mehrerer Variablen zu.

5. Verschwinden der zweiten Differentialquotienten der $f_\varkappa$. An den vorstehenden Sätzen über den Grenzwert des Produktes von Funktione

rd es jedenfalls am auffälligsten erscheinen, daß man, ausgehend von
st ganz *willkürlichen*, nur unbedeutend eingeschränkten Funktionen $f_\varkappa$,
einem so speziellen Resultat, wie es die Limes-Funktion e^{-u^2} darstellt,
langt. Dies Ergebnis wird verständlicher, wenn wir uns überlegen, daß
r mit unseren Aussagen lediglich das Verhalten der $f_\varkappa$ in der unmittelbaren
ngebung eines gewöhnlichen Scheitelpunktes zur Darstellung gebracht
ben. Denken wir uns die $f_\varkappa$ reell, was sie ja in der Nähe des ausge-
ichneten Punktes sind, und der Einfachheit wegen — für die jetzige
erlegung — unbeschränkt differenzierbar, so ist das Kennzeichen eines
heitelpunktes (d. i. eines Maximums) dies, daß mindestens der erste
fferentialquotient verschwindet und der erste nicht verschwindende
fferentialquotient von *gerader* Ordnung und *negativ* ist. Nehmen wir
n an, es sei

$$\frac{d^{2\nu} f_\varkappa}{dx^{2\nu}} = -(2\nu)!\, s_\varkappa^{2\nu}$$

e niedrigste, bei irgend einem $f_\varkappa$ (an der Stelle $x = a_\varkappa$) nicht ver-
nwindende Ableitung und es wachse die Summe

$$r_n^{2\nu} = \sum_{\varkappa=1}^{n} s_\varkappa^{2\nu}$$

t n von gleicher Ordnung ins Unendliche. Dann kann man an die
elle der in Gleichung (3), § 1 eingeführten Funktion $\vartheta_\varkappa(y)$ die folgende
ten lassen:

$$\frac{\log \mathrm{nat}\, f_\varkappa + (s_\varkappa y)^{2\nu}}{y^{2\nu}} = \vartheta_\varkappa(y).$$

an sieht, daß jetzt in ähnlicher Weise wie früher und unter analogen
raussetzungen geschlossen werden kann, daß

$$\lim_{n=\infty} \left[f_1\left(a_1 + \frac{u}{r_n}\right) \cdot f_2\left(a_2 + \frac{u}{r_n}\right) \cdots f_n\left(a_n + \frac{u}{r_n}\right)\right] = e^{-u^{2\nu}}$$

d ebenso hinsichtlich des Integrales über du. Es ist noch zu beachten,
ß hier r_n mit der 2ν-ten Wurzel aus n wächst, so daß, wenn wir (I_5) auf
obenstehende Form $(4'')$ bringen wollten, es heißen müßte:

$$f_1\left(a_1 + \frac{z}{\sqrt[2\nu]{n}}\right) \cdot f_2\left(a_2 + \frac{z}{\sqrt[2\nu]{n}}\right) \cdots f_n\left(a_n + \frac{z}{\sqrt[2\nu]{n}}\right) = e^{-(h_n z)^{2\nu}}$$

n sieht an $(6''')$ deutlich, wie der Prozeß der *Abszissendehnung* für
Resultat wesentlich ist. Die weitere Verfolgung der hier angeregten
gemeineren Fragestellung können wir unterlassen, da sie für die Wahr-
einlichkeitsrechnung bisher keine Bedeutung erlangt hat. Es soll nur
Verdeutlichung der eigentlichen Resultate festgestellt werden:

I_5, II_5. *Man gelangt zu dem allgemeineren Ausdruck* (I_5) *für den Grenzwert eines Produktes von Funktionen, in dem höhere, gerade Potenzen im Exponenten von e auftreten, wenn die ersten nicht verschwindenden Differentialquotienten in den Scheitelpunkten der $f_\varkappa$ von höherer als zweiter Ordnung sind.*

§ 3.

Sätze über den Grenzwert eines Integralproduktes von Funktionen.

1. Bezeichnungen und Definitionen. Es seien $V_1(x), V_2(x), V_3(x), \ldots$ reelle, *nirgends abnehmende*, im ganzen Bereich der reellen Variablen x definierte Funktionen, die für $x = -\infty$ den Wert *null*, für $x = \infty$ den Wert *eins* besitzen und an etwaigen Sprungstellen stets den Wert ihres *oberen* (rechten) Limes annehmen. Wir wollen derartige Funktionen, um nicht immer ihre Eigenschaften wiederholen zu müssen — im Hinblick auf ihre Bedeutung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung — kurz als „*Verteilungen*" bezeichnen.

Da $V(x)$ monoton ist, existiert für jede beschränkte, stetige Funktion $\varphi(x)$ das „*Stieltjessche*" *Integral*

$$(*) \qquad \int_a^b \varphi(x)\, dV(x),$$

das in bekannter Weise als Grenzwert einer Summe über Ausdrücke von der Form $\varphi(\xi_\iota)[(V(x_{\iota+1}) - V(x_\iota)]$ definiert wird, wobei $a \leqq x_\iota < \xi_\iota < x_{\iota+1} \leqq b$, $\iota = 1, 2, 3 \ldots$ eine Intervall-Teilung des Integrationsbereiches a, b bedeutet, deren größte Intervall-Länge beim Grenzübergang gegen null geht. Wir wollen das Symbol (*) auch auf solche $\varphi(x)$ anwenden, die beschränkt, nicht notwendig stetig, aber jedenfalls *monoton* (oder wenigstens von beschränkter Schwankung) sind und hierzu festsetzen, daß unter dem Wert von (*) stets der *obere* Limes der Summe gemeint sei.

Die Zeichen $-\infty$ und $+\infty$ als untere bzw. obere Grenze eines bestimmten Integrales *lassen wir hinfort weg.* Es bedeutet also $\int$ schlechthin die Integration über die ganze reelle Achse, $\int^x$ die Integration von $-\infty$ bis x usw.[3]).

---

[3]) Die hier eingeführte Bezeichnungsweise $\int \varphi(x) dV(x)$ ist den in der Wahrscheinlichkeitsrechnung gebräuchlichen, wie $\mathfrak{D}[\varphi(x)]$ (Durchschnitt von φ, Bruns) oder $m \cdot H \cdot \varphi(x)$ (mathemat. Hoffnung von φ, Markoff) dadurch überlegen, daß die Verteilung, bezüglich deren der Durchschnitt gebildet wird, ausdrücklich angeführt erscheint. An Einfachheit dürfte sie auch nicht nachstehen und vor allem sich der sonstigen Schreibweise der Analysis besser anpassen.

Als „*Integralprodukt*“ *der n Verteilungen* $V_1(x), V_2(x), \ldots, V_n(x)$ efinieren wir das $(n-1)$fache, im Stieltjesschen Sinne und gemäß der ben gemachten Festsetzung zu bildenden Integral

$$) \quad W_n(u) = \int\int \ldots \int V_n(x - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1}) dV_{n-1}(x_{n-1}) dV_{n-2}(x_{n-2}) \ldots dV_1(x_1),$$

obei u in einer bestimmten, noch näher anzugebenden Weise *linear* mit *wächst.* Die Existenz des Integrales im Hinblick auf die unendlichen renzen ist dadurch sichergestellt, daß $|V_n| \leqq 1$ und $\int dV_\varkappa = 1$ für jedes $\varkappa$.

Man sieht sofort, daß das *Integralprodukt wieder eine Verteilung* ist: s verschwindet für $u = -\infty$, weil $V_n(-\infty) = 0$, es kann mit wachsendem nicht abnehmen, da der einzige von u abhängige Faktor des Integranden, ämlich V_n, nicht abnimmt, während die anderen positiv sind; es geht für $= \infty$ in das Produkt $\int dV_1(x_1) \cdot \int dV_2(x_2) \ldots \int dV_{n-1}(x_{n-1})$ über, dessen aktoren sämtlich gleich 1 sind; und genügt schließlich an etwaigen Unetigkeitsstellen der ausgesprochenen Bedingung, da das Integral als die bere Limes-Funktion definiert wurde.

Gegenstand unserer Untersuchung ist vor allem der *Grenzwert*

$$1') \qquad W(u) = \lim_{n=\infty} W_n(u)$$

ir eine unendliche Folge von Verteilungen, die gewissen Einschränkungen nterworfen werden wird.

Haben sämtliche $V_\varkappa(x)$ — was wir jedoch nicht allgemein voraustzen wollen — eine *beschränkte Ableitung* $v_\varkappa(x)$, so hat auch $W_n(u)$ ne solche, und man erhält durch Differentiation von (1):

$$2) \quad w_n(u) = \text{konst.} \int\int \ldots \int v_n(x - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1}) v_{n-1}(x_{n-1}) v_{n-2}(x_{n-2}) \ldots v_1(x_1)\, dx_{n-1}\, dx_{n-2} \ldots dx_1.$$

ie Konstante vor dem Integralzeichen ist der Koeffizient von u in dem nearen Ausdruck für x. Die nicht-negativen Funktionen $v_\varkappa(x)$ bzw. $_n(u)$ bezeichnen wir als die zu $V_\varkappa$ bzw. W_n gehörigen „*Verteilungsichten*“.

Haben die $V_\varkappa(x)$ — ein anderer Grenzfall — *nur für* $x = 0, 1, 2, \ldots$ *achstumstellen*, und zwar mit den Sprunggrößen $v_\varkappa(0), v_\varkappa(1), v_\varkappa(2), \ldots$, haben auch die Integralprodukte W_n, zunächst als Funktion von x beachtet, dieselbe Eigenschaft. Die Sprunggrößen $w_n(u_0), w_n(u_1), w_n(u_2), \ldots$, obei die $u_0, u_1, u_2, \ldots$ vermöge der linearen Beziehung den $x = 0, 1, 2, \ldots$ ntsprechen, sind gegeben durch $(n-1)$fache Summen:

$$3) \qquad w_n(u) = \sum v_1(x_1) \cdot v_2(x_2) \ldots v_n(x_n),$$

erstrecken über alle ganzzahligen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit der Summe x, unter eachtung der Zuordnung zwischen x und u. Nur unwesentlich allgemeiner

ist der später zu betrachtende Fall, in dem von den Wachstumstellen der $V_\varkappa$ vorausgesetzt wird, daß ihre *Abstände ganzzahlige Vielfache einer Einheit* ε sind.

In den beiden Sonderfällen (2) und (3) fragen wir nach den Grenzwerten

$$(2') \qquad w(u) = \lim_{n=\infty} w_n(u)$$

und

$$(3') \qquad \mathfrak{w}(u) = \lim_{n=\infty} [\text{konst. } \mathfrak{w}_n(u)],$$

wobei konst. wieder den in (2) auftretenden Wert hat. In (1′) und (2′) sind beim Grenzübergang die Werte von u festzuhalten; in (3′) wird der Grenzübergang so vollzogen, daß das bei jedem n nur diskreter Werte fähige u sich einer festen Grenze nähert. Daß dies möglich ist, wird sich später (§ 3, 3) zeigen.

Man überzeugt sich leicht, daß in allen Fällen die Faktoren des Integralproduktes *vertauschbar* sind. Dagegen genügt die Definition (1) dem assoziativen Gesetz nur bei besonderen Festsetzungen über die Beziehung zwischen x und u, die für uns nicht in Betracht kommen (vgl. § 1, 1).

Für $n = 1$ ergänzen wir die Definition durch die Festsetzung

$$(1'') \qquad W_1(u) = V_1(x),$$

aus der in den Fällen (2) und (3) notwendig folgt:

$$(2'') \qquad w_1(u) = \text{konst. } v_1(x),$$

$$(3'') \qquad \mathfrak{w}_1(u) = \mathfrak{v}_1(x).$$

2. Voraussetzungen. a) Von *jeder einzelnen* der Verteilungen $V_\varkappa(x)$ setzen wir voraus:

1. Es existiere eine positive Zahl $c_\varkappa^2$, für die das Integral

$$(a1) \qquad C = \int e^{c_\varkappa^2 x^2} d V_\varkappa(x)$$

einen endlichen Wert besitzt. Man erkennt leicht, daß es keine weitere Einschränkung bedeutet, wenn für C ein beliebiger Wert > 1 vorgeschrieben wird.

Aus (a 1) folgt, daß jedes Integral von der Form $\int \varphi(x)\, d V_\varkappa(x)$ existiert, wenn $\varphi(x)$ beschränkt ist oder im Unendlichen nicht stärker wächst, als etwa ein Polynom in x. Insbesondere erkennt man, daß jede (a 1) genügende Verteilung einen endlichen „*Mittelwert*“ $a_\varkappa$ und eine endliche „*Streuung*“ $s_\varkappa^2$ besitzt:

$$(4) \qquad a_\varkappa = \int x\, d V_\varkappa(x), \qquad s_\varkappa^2 = \int (x - a_\varkappa)^2\, d V_\varkappa(x).$$

2. Die *Streuung* $s_\varkappa^2$ der Verteilung $V_\varkappa(x)$ sei *von null verschieden:*

2) $$s_\varkappa^2 > 0.$$

t anderen Worten heißt das: Die Verteilung $V_\varkappa$ habe mehr als eine achstumsstelle

b) Von der *Gesamtheit* der Verteilungen $V_\varkappa(x)$ setzen wir voraus:

1. Es existiere zu einem festen $C > 1$ eine positive Zahl c^2, so daß abhängig *von* $\varkappa$:

1) $$\int e^{\frac{c^2(x-a_\varkappa)^2}{2s_\varkappa^2}} dV_\varkappa(x) < C.$$

es erfordert nur (wenn die Folge der $a_\varkappa$ beschränkt ist), daß es für e in a) definierten Zahlen $c_\varkappa$ und $s_\varkappa$ ein von null verschiedenes kleinstes odukt $c_\varkappa s_\varkappa$ gibt.

2. Die Reihe der in Gl. (4) definierten *Mittelwerte* $a_\varkappa$ und der *Streugen* $s_\varkappa$ sei *beschränkt*, doch wachse die Summe der letzteren *stärker* s *mit der* $^2/_3$ *Potenz von* n ins Unendliche:

2) $$|a_\varkappa| < A, \quad s_\varkappa^2 < S^2, \quad \frac{n^{\frac{2}{3}}}{\sum_{\varkappa=1}^{n} s_\varkappa^2} \leqq \varepsilon(n),$$

A und S beliebige endliche Beträge und $\varepsilon(n)$ eine mit $n = \infty$ verwindende positive Funktion von n bedeutet.

Man erkennt wieder wie in § 1, daß die Voraussetzungen b) nur ne gewisse *Gleichmäßigkeit* in der Erfüllung der Voraussetzungen a) ndern. Sind alle $V_\varkappa$ untereinander gleich, so sind die b) in den a) thalten.

Die Bedeutung von (b 1) liegt vornehmlich darin, daß dadurch die *lge der mit dem Anfangspunkt* $a_\varkappa$ *und dem Maßstabfaktor* $s_\varkappa$ *gebildeten n-ten Momente" der Verteilungen* $V_\varkappa$ *beschränkt* wird. Rechnet man mlich das Maximum der Funktion $z^m e^{-c^2 z^2}$, so findet man leicht

) $$z^m e^{-c^2 z^2} | \leqq \left(\frac{m}{2c^2 e}\right)^{\frac{m}{2}}$$

Daraus folgt, wenn

) $$z = \frac{x - a_\varkappa}{s_\varkappa \sqrt{2}}$$

setzt wird, mit (b 1) für den Betrag des auf z bezogenen m-ten Momentes von $V_\varkappa(x)$:

) $$\left| \int z^m dV_\varkappa(x) \right| < \int |z^m e^{-c^2 z^2}| \cdot e^{c^2 z^2} dV_\varkappa(x) < C \cdot \left(\frac{m}{2c^2 e}\right)^{\frac{m}{2}},$$

abhängig von $\varkappa$.

3. Behauptungen. III. *Genügen die Verteilungen* $V_1, V_2, V_3, \ldots$ *den eben angeführten Voraussetzungen* (a 1), (a 2) *und* (b 1), (b 2) *und setzt man*

$$x = r_n u + b_n, \qquad u = \frac{x - b_n}{r_n} \tag{7}$$

mit

$$b_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \qquad r_n^2 = 2(s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_n^2), \tag{7'}$$

wo $a_\varkappa$ *und* $s_\varkappa^2$ *die in* (4) *definierten Mittelwerte und Streuungen der* $V_\varkappa$ *bezeichnen, so gilt für die mit* (1) *und* (1′) *definierte Verteilung* $W(u)$

$$W(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int^{u} e^{-x^2} dx \equiv \Phi(u) \tag{III}$$

im ganzen Bereich der u-Achse. Oder ausführlicher: *Es läßt sich stets ein* n_0 *so finden, daß für* $n > n_0$:

$$\left| \int\int \ldots \int V_n(r_n u + b_n - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1})\, dV_{n-1}(x_{n-1})\, dV_{n-2}(x_{n-2}) \ldots dV_1(x_1) - \Phi(u) \right| < \varepsilon \tag{III'}$$

für jedes u, *bei beliebig vorgegebenem* ε.

IV. *Besitzen die Verteilungen* $V_1, V_2, V_3, \ldots$ *überdies*[4]) *durchweg beschränkte Ableitungen* $v_1, v_2, v_3, \ldots$ *von gleichmäßig beschränkter Variation* (also so, daß die Gesamtschwankungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ von $v_1, v_2, v_3, \ldots$ eine obere Schranke σ haben), *so gilt außer Gleichung* (III) *auch für die mit* (2) *und* (2′) *definierte Verteilungsdichte* $w(u)$ *in jedem endlichen Bereich von* u:

$$w(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \equiv \varphi(u) \tag{IV}$$

an allen Stetigkeitsstellen von $w(u)$; *und an allen anderen Stellen*:

$$\tfrac{1}{2}[w(u+0) + w(u-0)] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \equiv \varphi(u). \tag{IV'}$$

Ausführlicher lautet (IV): *Es läßt sich zu jedem vorgegebenen* u_0 *und* ε *ein* n_0 *so finden, daß für* $n > n_0$:

$$\left| r_n \int\int \ldots \int v_n(r_n u + b_n - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1})\, v_{n-1}(x_{n-1})\, v_{n-2}(x_{n-2}) \ldots v_1(x_1)\, dx_{n-1}\, dx_{n-2} \ldots dx_1 - \varphi(u) \right| < \varepsilon \tag{IV''}$$

für jede Stelle $|u| \leqq u_0$, *an der das Integral stetig ist.*

V. *Besitzen die den Bedingungen* (a 1)(a 2) *und* (b 1)(b 2) *genügenden Verteilungen*[5]) $V_1, V_2, V_3, \ldots$ *nur diskret liegende Wachstumsstellen mit*

---

[4]) Durch die Korollare in § 6 werden die Voraussetzungen für die Fälle der Behauptungen IV und V wesentlich eingeschränkt werden.

[5]) Vgl. die vorangehende Fußnote.

Sprunggrößen $\mathfrak{v}_1(x)$, $\mathfrak{v}_2(x)$, $\mathfrak{v}_3(x)$, ..., *deren Abstände (Differenzen* x*) nur ganzzahlige Vielfache einer Einheit* ε *sind, wobei der Abnd* ε *selbst mindestens einmal bei jedem* $V_\varkappa$ *und zwar zwischen zwei llichen, mit* $\varkappa = \infty$ *nicht gegen null gehenden Sprunggrößen vorkommt, gilt außer Gleichung* (III) *auch für die mit* (3) *und* (3′) *definierte hlenfolge* $\mathfrak{w}(u)$:

$$\mathfrak{w}(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \equiv \varphi(u),$$

r ausführlicher: *Es läßt sich zu einem beliebig vorgegebenen* ε *ein finden, so daß für* $n > n_0$

$$|r_n \sum_{(x_\varkappa)} \mathfrak{v}_1(x_1)\mathfrak{v}_2(x_2)\ldots\mathfrak{v}_n(x_n) - \varphi(u)| < \varepsilon$$

$$\text{für } u = \frac{m_n \varepsilon - b_n}{r_n}, \qquad (m_n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

bei *die Summation über alle Wertverbindungen* $x_\varkappa = k_\varkappa \varepsilon$ $(k_\varkappa = 0, 1, \pm 2, \ldots)$ *zu erstrecken ist, für welche* $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = m_n$, *und* m_n *so zu wählen sind, daß* u *mit* $n = \infty$ *einer festen Grenze zustrebt.*

Da r_n^2 nach (7′) zufolge der dritten der Ungleichungen (b 1) mit n Unendliche wächst, kann man, wenn nur n genügend groß gewählt rd, immer ein ganzzahliges m_n so finden, daß der Unterschied zwischen em beliebig vorgegebenen u und dem Quotienten $(m_n \varepsilon - b_n) : r_n$ bebig klein wird.

Die Bedeutung der Festsetzung (7) und (7′) ist analog (4′) in § 1 , daß jetzt der *Mittelwert aller* $W_n(u)$ *null*, die *Streuung aller* $W_n(u)$ *ich einhalb* wird. Denn führt man in (1) für x den Wert aus (7) ein d ersetzt bei Bildung von $\int u\, dW_n(u)$ die Integrations-Variable u rch die neue x_n:

$$x_n = r_n u + b_n - x_1 - x_2 - x_3 - \ldots - x_{n-1}, \quad u = \frac{1}{r_n} \sum_{\varkappa=1}^{n} (x_\varkappa - a_\varkappa),$$

erhält man:

$$a_n' = \int u\, dW_n(u) = \frac{1}{r_n} \int\int \ldots \int \sum_{\varkappa=1}^{n} (x_\varkappa - a_\varkappa)\, dV_1(x_1) \cdot dV_2(x_2) \ldots dV_n(x_n)$$

$$= \frac{1}{r_n} \int (x_1 - a_1)\, dV_1(x_1) \int dV_2 \cdot \int dV_3 \ldots \int dV_n$$

$$+ \frac{1}{r_n} \int (x_2 - a_2)\, dV_2(x_2) \cdot \int dV_1 \cdot \int dV_3 \cdot \int dV_4 \ldots \int dV_n + \ldots = 0,$$

in jedem der n Summanden rechts der erste Faktor vermöge (4) ll ist. Analog behandelt man das n-fache Integral, das die Streuung n $W_n(u)$ liefert:

$$(10') \quad s_n'^2 = \int u^2 \, d\, W_n(u) = \frac{1}{r_n^2} \int\int \cdots$$

$$\int \Big[\sum_{\varkappa=1}^{n} (x_\varkappa - a_\varkappa)^2 + \sum_{\varkappa \neq \lambda = 1}^{n} (x_\varkappa - a_\varkappa)(x_\lambda - a_\lambda) \Big] \, dV_1(x_1) \, dV_2(x_2) \ldots dV_n(x_n).$$

Die von der Doppelsumme mit $\varkappa \neq \lambda$ herrührenden Glieder sind wiede null, die von der einfachen Summe stammenden einzeln gleich $s_\varkappa^2$ nac der zweiten Gleichung (4); demnach hat man mit Rücksicht auf (7'):

$$(10) \qquad s_n'^2 = \frac{1}{r_n^2} \sum_{\varkappa=1}^{n} s_\varkappa^2 = \tfrac{1}{2}.$$

Über das gegenseitige Verhältnis der Behauptungen III bis V ist z sagen, daß zwar IV und V mehr aussagen als III (weil jedesmal auc Gl. (III) gilt), aber unter wesentlich einschränkenderen Voraussetzunge über die Verteilungen $V_\varkappa(x)$. Es erweist sich im folgenden als verhältnis mäßig einfach, IV und V durch Zurückführung auf die früheren Sätze und II zu beweisen, während der Beweis von Satz III umfassendere Vor bereitungen erfordert.

4 Zurückführung der Integralprodukte auf einfache Pro dukte. Die Bildung der hier als „*Integralprodukte*" bezeichneten Ver teilungen läßt sich, wie schon Laplace im wesentlichen erkannt hat, au die Bildung *einfacher Produkte* von Funktionen zurückführen. Man sieh zunächst in dem durch (3) gekennzeichneten Fall von Verteilungen mi nur ganzzahligen Wachstumstellen, daß $\mathfrak{v}_n(u)$ nichts anderes ist, als de Koeffizient von t^x in der Entwicklung des Produktes von Polynomen

$$\sum_z \mathfrak{v}_1(z) \cdot t^z \cdot \sum_z \mathfrak{v}_2(z) \cdot t^z \ldots \sum_z \mathfrak{v}_n(z) \cdot t^z,$$

wo die Summen über alle $z = 0, 1, 2, \ldots$ zu erstrecken sind und zwische u und x die Beziehung (7) besteht. Im allgemeinen Falle beliebige Verteilungen werden an Stelle dieser Summen Stieltjessche Integral treten müssen, wobei noch eine gewisse Freiheit in der Verfügung über und etwaige Faktoren gelegen ist.

Wir definieren zunächst (in § 4 wird eine andere „erzeugende Funk tion" verwendet werden) als „*komplexe Adjunkte*" $f_\varkappa(x)$ *einer Verteilun* $V_\varkappa(x)$ *mit dem Mittelwert* $a_\varkappa$ die Funktion:

$$(11) \qquad f_\varkappa(x) = \int e^{(x-a_\varkappa)(z-a_\varkappa)i} \, dV_\varkappa(z).$$

Hier ist also, wenn von der Konstanten $a_\varkappa$ abgesehen wird, e^{xi} für gesetzt. Das Integral existiert für jeden endlichen Wert von x und ha einen absoluten Betrag $\leqq 1$. Durch Differentiation findet man

$$(11') \qquad f_\varkappa^{(m)}(x) = i^m \int (z - a_\varkappa)^m \, e^{(x-a_\varkappa)(z-a_\varkappa)i} \, dV_\varkappa(z).$$

Daher ist für $x = a_\varkappa$, mit Rücksicht auf die Definition von $a_\varkappa$ und in Gl. (4):

″) $$f_\varkappa(a_\varkappa) = 1, \qquad f_\varkappa'(a_\varkappa) = 0, \qquad f_\varkappa''(a_\varkappa) = -s_\varkappa^2.$$

Die komplexe Adjunkte des n-ten Integralproduktes bezeichnen wir $p_n(x)$; sie ist nach (11) vermöge (9) und (10) definiert durch

a) $$p_n(x) = \int e^{xui}\, dW_n(u)$$

l hier gilt

″a) $$p_n(0) = 1, \qquad p_n'(0) = 0, \qquad p_n''(0) = -\tfrac{1}{2}.$$

Um das grundlegende *Multiplikationsgesetz* der komplexen Adjunkten erhalten, müssen wir in (11a) den Wert von $dW_n(u)$ aus der Definingsgleichung (1) des Integralproduktes einsetzen. Verwendet man wieder Substitution (8), so entsteht:

$$p_n(x) = \int\int \dots \int e^{\frac{xi}{r_n}\sum_{\varkappa=1}^{n}(x_\varkappa - a_\varkappa)}\, dV_1(x_1)\, dV_2(x_2) \dots dV_n(x_n).$$

Hier lassen sich die Integrations-Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ trennen und n erhält für $p_n(x)$ ein Produkt von n Faktoren der Form

$$\int e^{(x_\varkappa - a_\varkappa)\frac{x}{r_n} i}\, dV_\varkappa(x_\varkappa) = f_\varkappa\left(a_\varkappa + \frac{x}{r_n}\right).$$

Demnach wird:

) $$p_n(u) = f_1\left(a_1 + \frac{u}{r_n}\right) \cdot f_2\left(a_2 + \frac{u}{r_n}\right) \dots f_n\left(a_n + \frac{u}{r_n}\right);$$

Worten:

Die komplexen Adjunkten der Verteilungen $V_\varkappa$ einerseits und die er Integralprodukte W_n andererseits stehen in wesentlich derselben ziehung zueinander wie die in § 1 betrachteten Funktionen $f_\varkappa$ und e Produkte p_n.

Nur in der Normierung liegt ein kleiner Unterschied: In § 1 bedeutete r_n^2 die *halbe* Summe der zweiten Ableitungen der $f_\varkappa$ an den Stellen $= a_\varkappa$, jetzt ist es nach (7′) und (11″) die *doppelte* Summe. Daraus gt, daß der Limes von $p_n(u)$, falls wir die Erfüllung der Voraussetzungen § 1 durch die komplexen Adjunkten der $V_\varkappa$ nachweisen können, den Wert

) $$p(u) = \lim_{n=\infty} p_n(u) = e^{-\frac{u^2}{4}}$$

ehmen muß.

Tatsächlich ist leicht zu sehen, daß unsere $f_\varkappa$ dem *ersten Teil* der aussetzungen des § 1, nämlich (a1) und (a2), sowie (b1) und (b2) ügen. Denn (a1) ist durch (11″) erledigt, während (b1) genau durch

die Voraussetzung (b2) über die $V_\varkappa$ im vorliegenden Paragraph gedeckt wird. Es bleibt also nur noch (a2) und (b2) nachzuweisen, nämlich

$$(14) \qquad \vartheta_\varkappa(y) = \left| \frac{\log \text{nat} f_\varkappa(a_\varkappa + y) + \frac{1}{2} s_\varkappa^2 y^2}{y^2} \right| \leqq C' |y| \quad \text{für} \quad |y| < y_0.$$

Nun verhält sich $f_\varkappa$ und $\log \text{nat} f_\varkappa$ an der Stelle $y = 0$ vollkommen regulär: der Zähler von $\vartheta_\varkappa(y)$ verschwindet samt seinen beiden ersten Ableitungen für $y = 0$, die dritte Ableitung ist vermöge (11′) und (11″)

$$\frac{d^3}{dy^3} [\log \text{nat} f_\varkappa(a_\varkappa + y) + \tfrac{1}{2} s_\varkappa^2 y^2]_{y=0} = \frac{d^3 f_\varkappa(a_\varkappa)}{dy^3} = -i \int (x - a_\varkappa)^3 \, dV_\varkappa(x).$$

Dieser Ausdruck besitzt nach (6) und der zweiten Ungleichung (b2) die von $\varkappa$ unabhängige obere Grenze

$$C \cdot S^3 \left(\frac{3}{c^2 e} \right)^{\frac{3}{2}},$$

wo C und c^2 die mit (b1) eingeführten Konstanten bedeuten. Es ist somit für hinreichend kleine $|y|$:

$$(14') \qquad |\log \text{nat} f_\varkappa(a_\varkappa + y) + \tfrac{1}{2} s_\varkappa^2 y^2| \leqq C' |y|^3 \text{ für } C' > C S^3 \left(\frac{3}{c^2 e} \right)^{\frac{3}{2}},$$

womit (14) bewiesen ist. *Zufolge Satz* I *gilt sonach* (13) *in jedem endlichen Bereich von* u.

Setzt man in (11a) für $W_n(z)$ die Gaußsche Funktion $\Phi(z)$ ein, so ergibt sich die zugehörige komplexe Adjunkte

$$(15) \qquad \int e^{xzi} d\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{-z^2 + xzi} dz = \frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int e^{-\left(z - \frac{xi}{2}\right)^2} dz = e^{-\frac{x^2}{4}}.$$

Danach wird man wohl vermuten können, daß, wenn $p_n(u)$ nach (13) gegen $e^{-\frac{u^2}{4}}$ konvergiert, unter gewissen Umständen $W_n(z)$ gegen $\Phi(z)$ konvergiert. In den Spezialfällen der Sätze IV und V läßt sich dies, wie wir sehen werden, durch *nähere Betrachtung der* $f_\varkappa$ sowie durch Aufstellung einer *Umkehrformel*, die eine Verteilung aus ihrer komplexen Adjunkten zu finden gestattet, auch wirklich nachweisen.

5. Beweis der Behauptung V. Wir wollen annehmen, was offenbar keine wesentliche Einschränkung gegenüber den Voraussetzungen des Satzes ist, daß Wachstumstellen der $V_\varkappa(x)$ nur bei $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ liegen. Die komplexe Adjunkte ist sodann nach (11) durch

$$(16) \qquad f_\varkappa(a_\varkappa + y) = \sum_x \mathfrak{v}_\varkappa(x) e^{(x - a_\varkappa) y i}$$

definiert, wobei die Summation über alle ganzzahligen x zu erstrecken ist. Multipliziert man (16) beiderseits mit $e^{-(z - a_\varkappa) y i}$, wo z wieder eine ganze

l, und integriert von $-\pi$ bis $+\pi$ nach y, so fallen rechts alle Sum-nden aus, für die $x \neq z$, und es bleibt nur für $x = z$ das Integral $\mathfrak{v}_x(z)$. Somit besteht die *Umkehrformel*:

$$\mathfrak{v}_x(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_x(a_x + y)\, e^{-(z-a_x)yi}\, dy, \qquad z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Man kann dies noch etwas anders schreiben, indem man an Stelle f_x eine neue Funktion f_x^* durch

$$f_x^*(a_x + y) = f_x(a_x + y) \quad \text{für} \quad -\pi \leqq y \leqq \pi,$$
$$= 0 \qquad\quad \text{„} \quad |y| > \pi$$

führt, womit (16′) lautet:

$$\mathfrak{v}_x(z) = \frac{1}{2\pi}\int f_x^*(a_x + y)\, e^{-(z-a_x)yi}\, dy.$$

Für die komplexe Adjunkte $p_n(y)$ des n-ten Integralproduktes hat n nach (11a):

$$p_n(y) = \sum_u \mathfrak{w}_n(u)\, e^{uyi} = \sum_x \mathfrak{w}_n\left(\frac{x-b_n}{r_n}\right) e^{(x-b_n)\frac{y}{r_n}i},$$

bei die Summation wieder über alle ganzzahligen x auszudehnen ist. handelt man (17) analog wie oben (16), multipliziert also beiderseits t $e^{-(z-b_n)\frac{y}{r_n}i}$, so muß man von $-r_n\pi$ bis $+r_n\pi$ nach y integrieren, nit die Integrale rechts für $x \neq z$ verschwinden. Die Umkehrformel tet mithin:

$$\mathfrak{w}_n(u) = \frac{1}{2r_n\pi}\int_{-r_n\pi}^{r_n\pi} p_n(y)\, e^{-uyi}\, dy, \quad u = -\frac{b_n}{r_n}, -\frac{b_n}{r_n} \pm \frac{1}{r_n}, -\frac{b_n}{r_n} \pm \frac{2}{r_n} \ldots,$$

bald wieder u an Stelle von z substituiert wird. Setzt man hier für p_n n Wert aus (12) ein und berücksichtigt (16″), so erhält man:

$$r_n\mathfrak{w}_n(u) = \frac{1}{2\pi}\int f_1^*\left(a_1 + \frac{y}{r_n}\right)\cdot f_2^*\left(a_2 + \frac{y}{r_n}\right)\ldots f_n^*\left(a_n + \frac{y}{r_n}\right) e^{-uyi}\, dy.$$

Die Funktionen f_x^* erfüllen ebenso wie die f_x (s. den vorangehenden schnitt) die Voraussetzungen (a1), (a2) und (b1), (b2) des § 1, die sich nur auf das Verhalten in der Umgebung von $y = 0$ erstrecken. Darüber aus genügen aber die f_x^* auch den Bedingungen (a4) und (b4), da nach (16″) außerhalb eines endlichen Bereiches überhaupt verschwinden. r das Verhalten gegenüber (a3) und (b3) sowie für die Existenz einer teren Schranke der s_x^2 ist nun der in Satz V gemachte Vorbehalt ent-eidend, wonach für jedes x wenigstens ein Paar aufeinanderfolgender ganzer hlen m_x und $m_x + 1$ existieren muß, für welche $\mathfrak{v}_x$ nicht verschwindet.

Da nämlich stets $\sum_x \mathfrak{v}_x(x) = 1$, kann f_x nur dann den Betrag 1 er
reichen, wenn alle Winkelargumente $(x - a_x)y$ in (16) bis auf ganze Viel
fache von 2π einander gleich sind. Nun ist aber für zwei aufeinander
folgende x der Winkelunterschied gleich y, und da (16) nur bis $|y| =$
gilt, so sieht man, daß $|f_x^*|$ außerhalb der Stelle $y = 0$ niemals 1 werde
kann, wie es (a3) verlangt. Ist $\mathfrak{v}$ der Betrag, der voraussetzungsgemä
von $\mathfrak{v}_x(m_x)$ und $\mathfrak{v}_x(m_x + 1)$ nicht unterschritten wird, so hat man

$$|f_x^*(a_x + y)| < 1 - 2\mathfrak{v}(1 - \cos y),$$

womit (a3) *und* (b3) *von* § 1 *Genüge getan ist.* Aus der Definition de
Streuung folgt überdies:

$$s_x^2 \geqq \tfrac{1}{2}\mathfrak{v},$$

weil die beiden Stellen $x = m_x$ und $x = m_{x+1}$ zur Streuung mindester
den Beitrag $\mathfrak{v}[\xi^2 + (\xi - 1)^2]$ liefern, dessen Minimum für $\xi = \frac{1}{2}$ eben $\frac{1}{2}\mathfrak{v}$ ist

Mithin erfüllen die f_x^* *sämtliche Voraussetzungen des* § 1. Schreib
man (17″) in der Form

$$(17''') \quad \mathfrak{w}(u) = \lim_{n=\infty} r_n \mathfrak{w}_n(u) = \frac{1}{2\pi}\int p_n(y)\psi(y)\,dy \quad \text{mit} \quad \psi(y) = e^{-uy}$$

wo $|\psi| = 1$, so folgt aus dem Korollar II_2 in § 2:

$$(18) \quad \mathfrak{w}(u) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-\frac{y^2}{4} - uyi}\,dy = \frac{e^{-u^2}}{\pi}\int e^{-\left(\frac{y}{2} + ui\right)^2} d\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}} \equiv \varphi(u$$

womit Gl. (V) *bewiesen ist*

Aus (18) ergibt sich auch sofort, daß Gl. (III) für die jetzt betrach
teten Verteilungen gilt. Denn zu einem beliebig vorgegebenen U und
kann man nach (18) ein n_0 so bestimmen, daß für $n > n_0$

$$(18') \quad \left|\mathfrak{w}_n(u) - \frac{\varphi(u)}{r_n}\right| < \frac{\varepsilon}{4 r_n U} \quad \text{für} \quad |u| < U.$$

Sind nun a, b zwei Punkte des Intervalls $|u| < U$, so besteht $W_n(b) - W_n(a$
aus höchstens $r_n \cdot 2U$ Summanden $\mathfrak{w}_n(u_\iota)$. Demnach ist zufolge (18′):

$$(18'') \quad \left|W_n(b) - W_n(a) - \sum_a^b \frac{\varphi(u_\iota)}{r_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Die hier auftretende Summe geht aber im Sinne des Riemannsche
Integralbegriffes gegen $\Phi(b) - \Phi(a)$.

Um einzusehen, daß die Ausdehnung dieser Überlegung auf den Fa
$a = -\infty$ zulässig ist, braucht man nur zu beachten, daß sowohl $\Phi(-U$
als $W_n(-U)$ kleiner als $1 : 2U^2$ sein muß, weil die Streuung beider Ver
teilungen $\frac{1}{2}$ ist. Wählt man also $U^2 > \frac{1}{\varepsilon}$, so gilt für $u < U$, und weiter mi

cksicht auf das Verhalten der Verteilungen im positiv Unendlichen, h darüber hinaus:

a) $$|W_n(u) - \Phi(u)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

s ist der Inhalt der Gl. (III).

6. Beweis der Behauptung IV. Wir schlagen einen analogen Weg um IV zu beweisen, indem wir zuerst eine Umkehrformel für die echnung von $v_\varkappa$ bzw. w_n aus $f_\varkappa$ bzw. p_n aufstellen und sodann die be-dere Natur der hier auftretenden $f_\varkappa$ untersuchen.

Die Umkehrung wird vermittelt durch das *Fouriersche Integral-rem*, das für jede integrable, im Unendlichen verschwindende Funktion beschränkter Schwankung angeschrieben werden kann. Es lautet $v_\varkappa(x)$:

) $$\bar{v}_\varkappa(z) = \frac{1}{2\pi}\int du \int v_\varkappa(x)\cos u(z-x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\Re\int e^{-(z-a_\varkappa)ui}\,du \int v_\varkappa(x)e^{(x-a_\varkappa)ui}\,dx.$$

Durch den Querstrich über $v_\varkappa$ soll angedeutet werden, daß $\bar{v}_\varkappa$ nur Stetigkeitstellen mit $v_\varkappa$ übereinstimmt, sonst aber das arithmetische el zwischen dem rechten und linken Limes bezeichnet. Führt man in) den Wert von $f_\varkappa$ aus (11) ein, so gewinnt man die *Umkehrformel*:

') $$\bar{v}_\varkappa(z) = \frac{1}{2\pi}\,\Re\int f_\varkappa(a_\varkappa + u)\,e^{-(z-a_\varkappa)ui}\,du.$$

n für die komplexe Adjunkte $f_\varkappa$ einer Verteilung mit beschränkter eitung nimmt (11) die Form

") $$f_\varkappa(a_\varkappa + y) = \int v_\varkappa(x)\,e^{(x-a_\varkappa)yi}\,dx$$

Analog hat man für die Ableitung des Integralproduktes:

"') $$\bar{w}_n(z) = \frac{1}{2\pi}\,\Re\int p_n(u)\,e^{-zui}\,du,$$

auch w_n, das durch (2) aus den $v_\varkappa$ gewonnen wird, von beschränkter wankung sein muß.

Von den $f_\varkappa$ ist im Abschn. 4 allgemein gezeigt worden, daß sie dem *en Teil* der Voraussetzungen des § 1 genügen. Wir wollen jetzt be-en, daß sie im vorliegenden Fall — in dem die Ableitungen $v_\varkappa$ von chmäßig beschränkter Schwankung sind — *auch die übrigen* Voraus-ungen der Sätze I und II erfüllen.

Bezeichnet $\sigma_\varkappa$ die Gesamtschwankung von $v_\varkappa(x)$, so läßt sich $v_\varkappa(x)$ Differenz zweier monotoner Funktionen, die von null bis $\frac{1}{2}\sigma_\varkappa$ wachsen, tellen. Daher ist nach dem zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$|\int v_\varkappa(x)\cdot\cos y(x-a_\varkappa)\,dx| \leqq 2\cdot\frac{v_\varkappa}{2}\,|\int_\alpha^\beta \cos y(x-a_\varkappa)\,dx| \leqq \frac{2\sigma_\varkappa}{|y|},$$

und da dieselbe Beziehung für den Sinus gilt und die $\sigma_\varkappa$ die obere Schranke σ haben:

$$|f_\varkappa(a_\varkappa + y)| \leqq \frac{2\sqrt{2}\sigma_\varkappa}{|y|} \leqq \frac{2\sqrt{2}\sigma}{|y|}, \tag{20}$$

womit den Bedingungen (a4) *und* (b4) *des* § 1 *Genüge getan ist.*

Die Bedingungen (a3) und (b3) verlangen, daß $|f_\varkappa|$ dauernd unterhalb 1 bleibt (abgesehen von der Stelle $y = 0$), was für kleine y aus (20) nicht zu ersehen ist. Nun kann das Integral rechts in (19″) auf keinem Teilintervall α, β größeren Betrag haben als das zu demselben Intervall α, β gehörige Integral von $v_\varkappa$, das wir mit $V_\varkappa(\alpha, \beta)$ bezeichnen wollen. Es genügt daher, da das über die ganze Achse erstreckte Integral von $v_\varkappa(x)$ den Wert 1 hat, für *irgendein* $\alpha < \beta$ nachzuweisen, daß für $|y| > y_0$

$$V_\varkappa(\alpha, \beta) - |\int_\alpha^\beta v_\varkappa(x)\, e^{(x-a_\varkappa)\,yi}\,dx| > \delta, \tag{20'}$$

damit sicher auch $1 - |f_\varkappa| > \delta$ wird. Wählen wir nun α, β so, daß $|y|(\beta - \alpha) = 2\pi$, so bedeutet die linke Seite von (20′), durch $V_\varkappa(\alpha, \beta)$ dividiert, den Schwerpunktsabstand einer über den Umfang des Einheitskreises (mit der Dichte $|v_\varkappa : y|$) ausgebreiteten Masse $V_\varkappa(\alpha, \beta)$ von der Kreisperipherie. Dieser Abstand wird am kleinsten, wenn die Masse möglichst konzentriert wird: da aber $v_\varkappa$ nicht größer als $\frac{1}{2}\sigma_\varkappa$ werden kann, wird die stärkste Konzentration, also das Minimum von (20′) erreicht durch gleichförmige Verteilung mit der Dichte $|\sigma_\varkappa : 2y|$ über den Bogen $2y\,V_\varkappa(\alpha, \beta) : \sigma_\varkappa$. Daraus ergibt sich

$$|\int_\alpha^\beta v_\varkappa(x)\, e^{(x-a_\varkappa)\,yi}\,dx| \leqq \left|\frac{\sigma_\varkappa}{y}\sin\frac{V_\varkappa(\alpha,\beta)\,y}{\sigma_\varkappa}\right| \leqq \frac{\sigma}{y_0}\sin\left|\frac{V_\varkappa(\alpha,\beta)\,y_0}{\sigma}\right|. \tag{20″}$$

Der Wert von $V_\varkappa(\alpha, \beta)$ kann nicht etwa bei jeder Wahl von α mit wachsendem $\varkappa$ gegen null gehen, da sonst Streuung und Mittelwert, entgegen der Annahme (b2) dieses Paragraphen, nicht beschränkt sein könnten. Man weist leicht nach, daß auf das Intervall $\mp(A + 2S)$ mehr als $\frac{3}{4}$ des $\int v\,dx$ entfallen muß, so daß hier die durchschnittliche Verteilungsdichte mindestens $3 : 8\,(A + 2S)$ beträgt. Daher muß es innerhalb des Intervalls $\mp(A + 2S)$ wenigstens ein Teilintervall von der Länge $\beta - \alpha = 2\pi : |y|$ geben, für welches in (20″)

$$V_\varkappa(\alpha, \beta) > \frac{3\pi}{4\,|y|\,(A+2S)} \geqq \frac{3\pi}{16\,\sigma\,(A+2S)} \tag{20‴}$$

setzen ist, weil wir mit Rücksicht auf (20) nur $|y|$-Werte unterhalb zu betrachten brauchen. Endgültig ist daher für $y_0 < |y| \leqq 4\sigma$

$$1 - |f_x| > \frac{3\pi}{16\sigma(A+2S)}\left[1 - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right] \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{3\pi y_0}{16\sigma^2(A+2S)},$$

mit den Bedingungen (a3) *und* (b3) *des* § 1 *Genüge getan ist.*

Endlich haben die Streuungen s_x^2 auch eine durch σ bestimmte untere nze. Denn eine Verteilung, deren Dichte nirgends größer als $\frac{1}{2}\sigma_x$ sein kann, eicht ihre kleinste Streuung bei stärkster Konzentration, also wenn die hte längs einer Strecke $2:\sigma_x$ den Maximalwert $\frac{1}{2}\sigma_x$ aufweist. Daher ist

$$s_x^2 \geqq \frac{1}{3\sigma_x^2} \geqq \frac{1}{3\sigma^2}.$$

thin sind alle Bedingungen des § 1 *erfüllt.*

Wenden wir auf (19‴) das Korollar II_2 des § 2 in derselben Weise, es oben bei (17‴) geschehen ist, an, so finden wir:

$$\overline{w}(x) = \lim_{n=\infty} w_n(x) = \frac{1}{2\pi}\Re\int e^{-\frac{u^2}{\nu} - xui}\,du = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\int e^{-\left(\frac{u}{2}+xi\right)^2} d\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}.$$

s ist der genaue Inhalt von Gl. (IV) *und* (IV′).

Aus (22) folgt auch leicht, daß im vorliegenden Fall überdies Gl. (III) . Denn da die Streuung von W_n für jedes n gleich $\frac{1}{2}$ ist, hat man $U > 0$

$$\int^{-U} w_n(u)\,du < \frac{1}{2U^2}, \qquad \int_U w_n(u)\,du < \frac{1}{2U^2}.$$

n kann daher stets ein U so groß wählen, daß der Betrag rechts in (22′) ner als $\frac{\varepsilon}{2}$ wird; macht man dann n_0 so groß, daß für $n > n_0$

$$|\overline{w}_n(u) - \varphi(u)| < \frac{\varepsilon}{4U} \quad \text{für} \quad |u| \leqq U,$$

nach (22) immer möglich ist, so ist im ganzen Bereich $-\infty, U$, weiterhin, weil auch

$$\int_U \varphi(u)\,du < \frac{1}{2U^2}$$

, auch im Bereich U, ∞

$$\left|\int_a^b \overline{w}_n(u)\,du - \int_a^b \varphi(u)\,du\right| < \varepsilon,$$

der Inhalt von Gl. (III) *ist.*

7. Ansatz zum Beweis der Behauptung III. Die Behauptung III eht darin, daß Gl. (III) auch ohne eine der einschränkenden Voraus- ungen des Abschn. 5 oder 6 bewiesen werden soll. Bedenkt man, daß

jede Verteilung V_n oder W_n eine monotone Funktion, daher die Differenz $W_n - \Phi$ von beschränkter Schwankung, überdies im Unendlichen null und mit Rücksicht auf die Voraussetzung (b1) auch absolut integrabel ist, so kann man für $W_n - \Phi$ das *Fouriersche Integraltheorem* ansetzen:

$$(24) \quad \overline{W}_n(z) - \Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int du \int [W_n(x) - \Phi(x)] \cos u(z-x)\, dx$$
$$= \frac{1}{2\pi} \Re \int e^{-zui}\, du \int [W_n(x) - \Phi(x)]\, e^{xui}\, dx.$$

Durch den Querstrich soll wieder angedeutet werden, daß $\overline{W}_n$ nur an Stetigkeitstellen mit W_n übereinstimmt, sonst aber das arithmetische Mittel des rechten und linken Limes bezeichnet. Andrerseits findet man aus (11a), unter Beachtung von (15) und mit Rücksicht auf das starke Verschwinden von $W_n - \Phi$ für $\pm\infty$, durch partielle Integration:

$$(24') \quad p_n(u) - e^{-\frac{u^2}{4}} = \int e^{xui} [dW_n(x) - d\Phi(x)]$$
$$= -ui \int [W_n(x) - \Phi(x)]\, e^{xui}\, dx.$$

Setzt man dies in (24) ein, so erhält man die allgemeine *Umkehrformel*:

$$(25) \quad \overline{W}_n(z) - \Phi(z) = -\frac{1}{2\pi} \Re \int \frac{e^{-uzi}}{ui} \left[p_n(u) - e^{-\frac{u^2}{4}}\right] du.$$

In Abschn. 4 ist gezeigt worden, daß der Klammerausdruck rechts für wachsende n in jedem endlichen Bereich $|u| < U$ gleichmäßig gegen null geht. Um aus (25) schließen zu können, daß zugleich $\overline{W}_n$ gegen Φ konvergiert, müßte man noch sehen, daß das Integral rechts in (25) für den Integrationsbereich $|u| > U$ mit wachsendem n null wird. Dies gilt jedenfalls, wenn die f_ν, deren Produkt p_n ist, den Bedingungen (a3) (a4) und (b3) (b4) des § 1 genügen, also z. B. im Falle des Satzes IV (Verteilungsdichte von beschränkter Schwankung).

Im Falle des Satzes V, und daher auch im allgemeinen Fall beliebiger Verteilungen, *bestehen jedoch die Voraussetzungen* (a3) (a4) *usw. nicht*. Nimmt man als Beispiel etwa die unter die Annahmen des Satzes V mit $\varepsilon = 2$ fallenden Verteilungen:

$$V_1(x) = V_2(x) = \ldots = 0 \quad \text{für} \quad -1 > x,$$
$$= \tfrac{1}{2} \quad \text{„} \quad +1 > x \geqq -1,$$
$$= 1 \quad \text{„} \quad x \geqq 1,$$

für welche $f_1(y) = f_2(y) = \ldots = \cos y$ wird, so sieht man, daß f_ν im allgemeinen *nicht einmal gegen null geht*. Unter den besonderen Voraussetzungen des Satzes V war es wohl möglich, die Funktionen f_ν durch die günstiger verlaufenden f_ν^* zu ersetzen und so auf dem Umweg über Gleichung (V) die Gleichung (III) zu beweisen. Für beliebige Ver-

ungen scheint ein derartiger Weg und damit eine direkte Ausnützung Beziehung (25) und (13) *nicht möglich* zu sein. Um Gleichung (III) vollen Umfang der Behauptung III zu beweisen, müssen wir weiter holen und im folgenden Paragraphen einige Hilfsmittel entwickeln, die § 5 zum Beweise selbst führen werden.

§ 4.

Vorbereitungen zum Beweis der Behauptung III.

1. Reelle Adjunkte einer Verteilung. Es wird für das Folgende zlich sein, an Stelle der in § 3, Gleichung (11) definierten „komplexen unkten" eine *reelle* Funktion einzuführen, die sich hinsichtlich des tiplikationsgesetzes ähnlich verhält, die allerdings nicht den Voraus- ungen des § 1 entspricht. *Wir definieren als reelle Adjunkte einer ebigen Verteilung $V_\varkappa(x)$ mit dem Mittelwert $a_\varkappa$ und der Streuung $s_\varkappa^2$ reelle Funktion.*

$$g_\varkappa(u) = e^{-\frac{s_\varkappa^2 u^2}{2}} \int e^{-(x-a_\varkappa)u}\, dV_\varkappa(x).$$

Integral existiert für jeden endlichen Wert von u, falls die $V_\varkappa$ der aussetzung (a1) des § 3 genügen. Besitzt $V_\varkappa$ eine beschränkte Ab- ung $v_\varkappa$, so ist $g_\varkappa$ im wesentlichen die sog. *Laplacesche Trans- nierte* von $v_\varkappa$. Für $u = 0$ hat $g_\varkappa(u)$ den Wert 1 und die erste Ab- ung null; aber die zweite Ableitung ist, im Gegensatz zu Gleichung (11″), gleich $-s_\varkappa^2 + s_\varkappa^2 = 0$. Über das Verhalten für große u können wir vorerst ts aussagen. Sicher ist nur, daß $g_\varkappa$ der Definition nach positiv ist, also e Nullstellen im Endlichen besitzt.

Die reelle Adjunkte des n-ten Integralproduktes bezeichnen wir $q_n(u)$:

$$q_n(u) = e^{-\frac{u^2}{4}} \int e^{-xu}\, dW_n(x);$$

besitzt natürlich alle eben erwähnten Eigenschaften der $g_\varkappa(u)$, sobald Konvergenz des Integrales in (1′) nachgewiesen ist. Wir beweisen e, indem wir $q_n(u)$ aus den $g_1(u)$, $g_2(u)$, …, $g_n(u)$ berechnen und it zugleich die grundlegende Formel für die Anwendung der g und q iten.

Setzen wir in (1′) so wie in § 3, 4 den Wert von $dW_n(x)$ aus der nitionsgleichung (1) von § 3 ein und verwenden wieder an Stelle von ie neue Integrations-Variable x_n, die durch (8) in § 3 definiert ist, ntsteht durch Trennung der Variablen:

$$q_n(u) = e^{-\frac{u^2}{4}} \int\int \dots \int e^{\frac{u}{r_n} \sum_{\varkappa=1}^{n} (x_\varkappa - a_\varkappa)} \, dV_1(x_1) \cdot dV_2(x_2) \dots dV_n(x_n)$$

$$= e^{-\frac{u^2}{2 r_n^2} \sum_{\varkappa=1}^{n} s_\varkappa^2} \int e^{-(x_1 - a_1)\frac{u}{r_n}} dV_1(x_1) \cdot \int e^{-(x_2 - a_2)\frac{u}{r_n}} dV_2(x_2) \dots \int e^{-(x_n - a_n)\frac{u}{r_n}} dV_n(x_n).$$

Demnach mit Rücksicht auf (1):

$$(2) \qquad q_n(u) = g_1\left(\frac{u}{r_n}\right) \cdot g_2\left(\frac{u}{r_n}\right) \dots g_n\left(\frac{u}{r_n}\right).$$

Es multiplizieren sich somit bei Bildung der Integralprodukte die reellen Adjunkten so wie die komplexen. Für den Grenzwert des q_n folgt daraus natürlich nichts, da die $g_\varkappa$ den wesentlichsten Bedingungen des § 1 nicht genügen. Der Weg, auf dem wir zu unserem Beweis gelangen, ist vielmehr der, daß wir eine *Potenzentwicklung* der $g_\varkappa$ aufsuchen, aus dieser eine Reihe für q_n gewinnen und schließlich *aus den Koeffizienten dieser Reihe* direkt auf W_n schließen.

2. Entwicklung der reellen Adjunkten. Wir setzen zunächst formal an:

$$(3) \quad g_\varkappa\left(\frac{u}{s_\varkappa \sqrt{2}}\right) = e^{-\frac{u^2}{4}} \int e^{-\frac{x - a_\varkappa}{s_\varkappa \sqrt{2}} u} \, dV_\varkappa(x) = c_\varkappa^{(0)} + c_\varkappa^{(1)} u + c_\varkappa^{(2)} u^2 + \dots,$$

worin nach dem oben Dargelegten stets

$$(3\,a) \qquad c_\varkappa^{(0)} = 1, \quad c_\varkappa^{(1)} = c_\varkappa^{(2)} = 0$$

sein muß, und wollen beweisen, daß die Reihe rechts für alle Werte von u konvergiert. Zu diesem Zwecke benutzen wir die bekannte Entwicklung

$$(4) \qquad e^{-\frac{u^2}{4} - uz} = \alpha_0(z) + \alpha_1(z) u + \alpha_2(z) u^2 + \dots,$$

in der die $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ die *Hermiteschen Polynome:*

$$(4') \qquad \begin{cases} \alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = -z, \quad \alpha_2 = \frac{z^2}{2} - \frac{1}{4}, \quad \alpha_3 = -\frac{z^3}{6} + \frac{z}{4}, \dots \\ \alpha_m = \sum \frac{(-1)^{m-k} z^{m-2k}}{4^k \, k! \, (m-2k)!} \qquad \left(k = 0, 1, 2, \dots, \frac{m}{2} \text{ bzw. } \frac{m-1}{2}\right. \end{cases}$$

bezeichnen. Die Reihe (4) konvergiert gleichmäßig in jedem endlichen Intervall von z und u, weil die Zahl der Summanden von α_m nur mit $\frac{m}{2}$ wächst, während der kleinste Nenner noch $\left(\frac{m}{2}\right)!$ enthält. Verwenden wir von nun an die beiden Variablen x und

$$(5) \qquad z = \frac{x - a_\varkappa}{s_\varkappa \sqrt{2}},$$

kürzeren Schreibweise wegen, *nebeneinander*, so ergibt sich für die effizienten von (3) der Ausdruck

$$c_x^{(m)} = \int \alpha_m(z)\, dV_x(x)$$

es ist nur zu zeigen, daß die mit diesen Koeffizienten gebildete he (3) konvergiert und — mit Rücksicht auf den unendlichen Intetionsbereich — daß sie wirklich g_x darstellt.

Das erstere folgt aus Gleichung (6) des § 3, nämlich:

$$\int |z|^n dV_x(x) < C\left(\frac{n}{2c^2e}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

nn nach (4′) ist bei Berücksichtigung von $m! > \left(\frac{m}{2}\right)!\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{m}{2}}$

$$|\alpha_m| \leqq \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} \frac{|z|^{m-2k}}{4^k k!\left(\frac{m}{2}-k\right)!} \frac{1}{\left(\frac{m}{2}-k\right)^{\frac{m}{2}-k}},$$

er nach (3′)

$$|c_x^{(m)}| < C \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} \frac{(c^2e)^{-\frac{m}{2}+k} \cdot 4^{-k}}{k!\left(\frac{m}{2}-k\right)!} = \frac{C}{\left(\frac{m}{2}\right)!}\left(\frac{1}{c^2e}+\frac{1}{4}\right)^{\frac{m}{2}} = c^{(m)},$$

mit die Konvergenz von (3) für alle u bewiesen ist. Man erkennt auch, die Folge der $c_x^{(m)}$ bei festem m beschränkt ist und $c^{(m)}$ zur oberen ranke hat.

Um die Zulässigkeit der gliedweisen Integration als Übergang von (4) (3) zu beweisen, beachten wir, daß die mit den oberen Grenzen der räge der $c_x^{(m)} : C$ nach (3″) gebildete Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{\left(\frac{k}{2}\right)!}\left(\frac{1}{c^2e}+\frac{1}{4}\right)^{\frac{k}{2}} = U(u)$$

vergiert, und zwar gleichmäßig in jedem endlichen Bereich von u. Ist ein ε und ein u_0 vorgeschrieben, so kann man dazu $U_0 = U(u_0)$ echnen und auf Grund der Konvergenz des Integrals (b1) ein x_0 so timmen, daß für alle $|x| > x_0$

$$\int_{-x}^{x} e^{c^2z^2} dV_x(x) + \int_{x} e^{c^2z^2} dV_x(x) < \frac{\varepsilon}{3U_0}.$$

etzt man hier $e^{c^2z^2}$ durch $|z|^n$, so hat man rechts den Faktor von C (6) hinzuzufügen (vgl. § 3, Gl. (6)). Ersetzt man daher $e^{c^2z^2}$ durch

$\alpha_m(z)$, so ist rechts der Faktor von C aus (3″) beizufügen. Mithin wi
mit Rücksicht auf (6″) *bei beliebigem* m:

$$(7') \quad \Big|\int_{-x}^{x}[\alpha_0(z)+\alpha_1(z)u+\ldots+\alpha_m(z)u^m]dV_\varkappa(x)-[c_\varkappa^{(0)}+c_\varkappa^{(1)}u+\ldots+c_\varkappa^{(m)}u^m]\Big|<$$
$$\text{für } x>x_0, \quad |u|<u_0.$$

Weiter kann man, da das Integral in (3) existiert, ein $x_1>x_0$ finde
für welches bei $|u|<u_0$

$$(7'') \quad \Big|\int_{-x_1}^{x_1}[\alpha_0(z)+\alpha_1(z)u+\alpha_2(z)u^2+\ldots]dV_\varkappa(x)-g_\varkappa\Big(\frac{u}{s_\varkappa\sqrt{2}}\Big)\Big|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Endlich läßt sich wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (4) zu diese
x_1 ein m_1 bestimmen, welches das Restglied der Reihe (4) für $|u|<$
und $|x|\leqq x_1$ unter den Betrag $\varepsilon:6x_1$ herabdrückt, so daß für dieses m

$$(7''') \quad \Big|\int_{-x_1}^{x_1}[\alpha_0(z)+\ldots]dV_\varkappa(x)-\int_{-x_1}^{x_1}[\alpha_0(z)+\ldots+\alpha_{m_1}(z)u^{m_1}]dV_\varkappa(x)\Big|<$$

Wendet man (7′), das für jedes m und für jedes $x>x_0$ gilt, auf x
und x_1 an, so erhält man durch Zusammenhalten von (7′), (7″) und (7‴)
das verlangte Resultat:

$$(7) \quad \Big|g_\varkappa\Big(\frac{u}{s_\varkappa\sqrt{2}}\Big)-[c_\varkappa^{(0)}+c_\varkappa^{(1)}u+\ldots+c_\varkappa^{(m_1)}u^{m_1}]\Big|<\varepsilon \quad \text{für} \quad |u|<u_0.$$

Unsere Ergebnisse (3‴) und (7) lassen sich kurz so aussprechen:

Für Verteilungen, die unseren Voraussetzungen in § 3 *genügen, die reelle Adjunkte eine ganze Funktion und die Folge der Koeffizienten c bei festem* m *beschränkt.*

3. Über die Nullstellen der Hermiteschen Polynome. D
wesentlichsten Eigenschaften der in (4′) angeführten Hermitesch
Polynome α_m — daß sie m reelle Zeichenwechsel besitzen usw. — setz
wir als bekannt voraus und wollen hier nur die Präzisierung eines (
kannten) Satzes über die *Verdichtung der Nullstellen*[6]) mit wachsendem
durchführen. Man beweist leicht, daß die Funktionen

$$(8) \quad \psi_m(z)=e^{-\frac{z^2}{2}}\alpha_m(z),$$

die in den Nullstellen mit den α_m übereinstimmen, der Differentialgleichu

$$(8') \quad \psi_m''=-(2m+1-z^2)\psi_m$$

genügen. Denn (8) gibt in (8′) eingesetzt die Differentialgleichu

---

[6]) A. A. Markoff, Bull. de l'Acad. St. Petersburg 5, série 9, 1898, p. 4
Wahrscheinlichkeitsrechnung, deutsch von H. Liebmann, Leipzig 1912, S. 258.

$\alpha_m'' - 2z\alpha_m' + 2m\alpha_m = 0$, und da man aus (4) (indem man beiderseits ifferenziert und dann links wieder die Reihe für den Exponentialausdruck etzt) leicht ableitet, daß $\alpha_m' = -\alpha_{m-1}$, so ist (8′) nur der etwas verderte Ausdruck für die bekannte Rekursionsformel

(8″) $$\alpha_{m-1} + 2z\alpha_m + 2m\alpha_{m+1} = 0,$$

welche die Hermiteschen Polynome (4′) charakterisiert. Nun haben die ntegrale von (8′) die Eigenschaft, daß sie in dem Bereiche, in dem $z^2-(2m+1)>0$ ist, ihre *konkave* Seite der Abszissenachse zukehren, also hier keine im Endlichen gelegene Nullstelle haben können, da sie sich sonst nicht symptotisch der Abszissenachse nähern könnten. Andererseits verhalten ich die Integrale im Bereich $|z| < \sqrt{2m+1}$ wie Sinus-Linien, d. h. sie ilden Wellen wie die Integrale von $z'' = -c^2 z$ und diese Wellen sind m Bereich $|z| < z_0 < \sqrt{2m+1}$ mindestens so stark gekrümmt, wie die einer Sinus-Linie mit $c^2 = 2m+1-z_0^2$ und höchstens so stark, wie die einer Sinus-Linie mit $c^2 = 2m+1$. Daraus folgt also der Satz:

Die m reellen Nullstellen der Hermiteschen Polynome $\alpha_m(z)$ liegen nicht außerhalb des Gebietes $|z| \leqq \sqrt{2m+1}$ und verdichten sich bei wachsendem m derart, daß in einem Gebiet $|z| \leqq z_0 < \sqrt{2m+1}$ der Abstand d_m zweier aufeinander folgender nicht größer als $\frac{\pi}{\sqrt{2m+1-z_0^2}}$ ist. Andererseits kann der Abstand nicht kleiner als $\frac{\pi}{\sqrt{2m+1}}$ sein:

(8‴) $$\frac{\pi}{\sqrt{2m+1}} < d_m < \frac{\pi}{\sqrt{2m+1-z_0^2}}.$$

4. Die einer Verteilung V_x zugeordneten Treppen $S_x^{(m)}$. Zwischen den Momenten einer Verteilung und den Koeffizienten ihrer reellen Adjunkten besteht ein einfacher Zusammenhang. Da man die Gleichungen (4′), welche die Hermiteschen Polynome definieren, unschwer nach den z^m auflösen kann, sobald die α_m gegeben sind, nämlich:

(9) $$z^0 = \alpha_0, \quad z^1 = -\alpha_1, \quad z^2 = 2\alpha_2 + \tfrac{1}{2}, \quad z^3 = -6\alpha_3 - \tfrac{3}{2}\alpha_1 \cdots,$$

so sieht man, daß *das m-te Moment von V_x sich durch $c_x^{(0)}, c_x^{(1)}, \ldots, c_x^{(m)}$ linear ausdrücken* läßt, z. B. für $m = 3$:

$$\int z^3 dV_x(x) = -6\int \alpha_3(z) dV_x(x) - \tfrac{3}{2}\int \alpha_1(z) dV_x(x) = -6c_x^{(3)} - \tfrac{3}{2}c_x^{(1)}.$$

Dies vorausgeschickt definieren wir als eine „*m-stufige Treppe*“ oder „Treppenlinie“ eine *Verteilung* (d. i. eine monoton von null bis 1 ansteigende Funktion), die *genau m im Endlichen gelegene Wachstumstellen* hat und sonst überall konstant verläuft. Das Bild einer solchen Funktion ist tatsächlich das des Querschnittes durch eine Treppe, die aus m Stufen

besteht. Wir wollen den folgenden, für den Zusammenhang zwisch einer Verteilung und den Koeffizienten ihrer Adjunkten fundamental Satz beweisen:

Bedeutet m eine beliebige natürliche Zahl und V_x eine unser Voraussetzungen (a 1) *und* (a 2) *genügende Verteilung* (oder eine V teilung, deren reelle Adjunkte eine ganze Funktion ist), *die selbst nic weniger als m Wachstumstellen hat, so gibt es stets eine m-stufige Trep $S_x^{(m)}$, die mit V_x in den ersten $2m$ Momenten* (vom nullten bis zu $2m-1$-ten) *oder*, was dasselbe ist, *in den ersten $2m$ Koeffizienten c reellen Adjunkten, übereinstimmt; sie wird in jeder Stufe von V_x doppe nämlich im horizontalen und vertikalen Teil der Stufe, geschnitten.*

Um dies zu beweisen, konstruieren wir zunächst die Treppenlin indem wir ihre Wachstumstellen (und zwar als Nullstellen eines Po noms $\beta_x^{(m)}$) und dann die dazugehörigen Sprunggrößen $\varsigma_x^{(1)}$, $\varsigma_x^{(2)}, \ldots, \varsigma$ angeben. Die Wachstumstellen nennen wir auch einfach die *Stufen*, u die $\varsigma_x^{(1)}$ die *Stufenhöhen*.

Wir gehen von der quadratischen Form in den y_ι

$$(10) \qquad \int [\alpha_0 y + \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_{m-1} y_{m-1}]^2 \, dV_x(x) = \sum_{\iota,\lambda} A_x^{(\iota,\lambda)} y_\iota y_\lambda$$

aus, die positiv definit sein muß, weil der Integrand nicht negativ und das Integral nur dann verschwinden könnte, wenn $V_x(x)$ gerade n an den höchstens $m-1$ Nullstellen des Klammerausdruckes Wachstu stellen hätte, was der Voraussetzung zuwiderläuft. Setzen wir also nach (1

$$(10') \qquad A_x^{(\iota,\lambda)} = \int \alpha_\iota(z)\alpha_\lambda(z)\, dV_x(x) \qquad (\iota,\lambda = 0, 1, 2, \ldots,$$

— immer mit dem in (5) definierten Zusammenhang zwischen z und x so hat das Gleichungssystem

$$(10'') \qquad \sum_{\iota=0}^{m-1} A_x^{(\iota,\lambda)} \varrho_x^{(\iota)} = -A_x^{(m,\lambda)} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, m-$$

eine von null verschiedene Nenner-Determinante, also eine eindeuti Lösung $\varrho_x^{(0)}\ \varrho_x^{(1)} \ldots \varrho_x^{(m-1)}$. Bilden wir mit diesen $\varrho_x^{(\iota)}$ des Polyn m-ten Grades in z:

$$(11) \qquad \beta_x^{(m)} = \alpha_m + \varrho_x^{(m-1)}\alpha_{m-1} + \varrho_x^{(m-2)}\alpha_{m-2} + \ldots + \varrho_x^{(0)}\alpha_0,$$

so läßt sich vor allem zeigen, daß es *genau m reelle Nullstellen besit*

Gleichung (10″) besagt nämlich mit Rücksicht auf (10′), daß zunäch jedes Integral der Form

$$11') \quad \int \alpha_\lambda \beta_\varkappa^{(m)} dV_\varkappa(x) = \sum_{\iota=0}^{m-1} \int \alpha_\lambda \alpha_\iota \varrho_\varkappa^{(\iota)} dV_\varkappa(x) + \int \alpha_\lambda \alpha_m dV_\varkappa(x)$$

$$= \sum_{\iota=0}^{m-1} \varrho_\varkappa^{(\iota)} A_\varkappa^{(\iota,\lambda)} + A_\varkappa^{(m,\lambda)} = 0 \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$$

erschwinden muß, weiterhin daher auch jedes Integral der Form

$$11'') \quad \int P_{m-1}(z) \cdot \beta_\varkappa^{(m)}(z) dV_\varkappa(x) = 0,$$

n dem $P_{m-1}(z)$ ein Polynom von höchstens $(m-1)$-ten Grade bezeichnet. Das letztere deshalb, weil nach dem, was oben gesagt wurde, jedes solche Polynom linear durch die ersten m Polynome α, also durch $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$, ausgedrückt werden kann. Aus dem Verschwinden von (11″) folgt nun, daß $\beta_\varkappa^{(m)}$ genau m reelle Zeichenwechsel besitzen muß, da man sonst für $P(z)$ das Differenzenprodukt $(z-z_1)(z-z_2)\ldots$, wo $z_1, z_2 \ldots$ die Nullstellen sind, setzen könnte, womit dann der Integrand konstantes Zeichen im ganzen Intervall erhielte.

Die m Nullstellen von $\beta_\varkappa^{(m)}$ sollen die Stufen der Treppe $S_\varkappa^{(m)}$ sein; wir bezeichnen sie mit $z_\varkappa^{(1)}$ bis $z_\varkappa^{(m)}$.

Als Stufenhöhe sei der Stelle $z_\varkappa^{(\iota)}$ zugeordnet:

$$12) \quad \mathfrak{s}_\varkappa^{(\iota)} = \int \frac{\beta_\varkappa^{(m)}(z) dV_\varkappa(x)}{(z - z_\varkappa^{(\iota)}) \beta_\varkappa'^{(m)}(z_\varkappa^{(\iota)})} \qquad (\iota = 1, 2, \ldots, m).$$

Dabei bedeutet β' die Ableitung von β nach z, und es bleibt jetzt zu beweisen: 1. daß die $\mathfrak{s}_\varkappa^{(\iota)}$ sämtlich positiv, 2. daß ihre Summe gleich 1, 3. daß die ersten $2m$ Koeffizienten der Adjunkten der durch sie bestimmten Verteilung mit den $c_\varkappa^{(0)}$ bis $c_\varkappa^{(2m-1)}$ übereinstimmen; 4. daß $V_\varkappa(x)$ und $S_\varkappa^{(m)}(x)$ genau $2m-1$ Schnittpunkte haben.

5. Nachweis der Eigenschaften von $S_\varkappa^{(m)}$. Die Formel (12) ist, wie bekannt, die Grundlage der Lagrangeschen Interpolationsformel, die zum Ausdruck bringt, daß für ein beliebiges Polynom P_{m-1} von höchstens $m-1$tem Grade:

$$12') \quad \sum_{\iota=1}^{m} P_{m-1}(z_\varkappa^{(\iota)}) \frac{\beta_\varkappa^{(m)}(z)}{(z - z_\varkappa^{(\iota)}) \cdot \beta_\varkappa'^{(m)}(z_\varkappa^{(\iota)})} \equiv P_{m-1}(z).$$

Dies gilt, gleichgültig wie die $z_\varkappa^{(\iota)}$ ausgewählt werden. Setzt man in 12′) für P_{m-1} der Reihe nach $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ ein, so folgt sofort aus (12), daß für *diese* Indizes $k = 0$ bis $m-1$:

$$13) \quad \int \alpha_k(z) dS_\varkappa^{(m)}(x) = \sum_{\iota=1}^{m} \alpha_k(z_\varkappa^{(\iota)}) \mathfrak{s}_\varkappa^{(\iota)} = \int \alpha_k(z) dV_\varkappa(x) = c_\varkappa^{(k)}.$$

Damit ist ein Teil der Behauptung 3 und, wenn man $k = 0$ in (1 einsetzt, die Behauptung 2 erwiesen.

Ist $k \geqq m$, höchstens gleich $2m-1$, so gilt für die oben mit (1 getroffene, spezielle Wahl von $\beta_\varkappa^{(m)}$ immer noch (13), wie folgende Übe legung zeigt. Man sucht zu jedem $\alpha_\varkappa$ für $m \leqq k \leqq 2m-1$ den Qu tienten Q und Rest R bei Division durch $\beta_\varkappa^{(m)}$:

$$\alpha_k = Q\,\beta_\varkappa^{(m)} + R, \qquad (k = m, m+1 \ldots 2m-$$

wobei Q und R höchstens vom Grade $m-1$ sind und R mit α_k an all Nullstellen von $\beta_\varkappa^{(m)}$ übereinstimmt. Wegen (11″) ist daher

$$\int \alpha_k(z)\,dV_\varkappa(x) = \int Q(z)\,\beta_\varkappa^{(m)}(z)\,dV_\varkappa(x) + \int R(z)\,dV_\varkappa(x) = \int R(z)\,dV_\varkappa(x$$

d. h. das Integral über α_k ist auf ein solches über R, also über ein Po nom von höchstens $(m-1)$-ten Grade zurückgeführt. Auf R läßt s wieder (12′) anwenden, und da $R(z_\varkappa^{(\iota)}) = \alpha_k(z_\varkappa^{(\iota)})$, so ist (13) auch die weiteren Indizes $k = m$ bis $2m-1$ und damit die Behauptung in vollem Umfang erwiesen.

Aus (13) folgt natürlich, mit Rücksicht auf den wiederholt erwähnt Zusammenhang zwischen den α_k und beliebigen Polynomen, daß der zwe Teil der Gleichung auch besteht, wenn an Stelle von α_k beiderseits zweiten Gleichheitszeichens ein *beliebiges* Polynom von höchstens $(2m-1)$-t Grad gesetzt wird. Wählen wir das Polynom $P(z) = [(z - z_\varkappa^{(1)})(z - z_\varkappa^{(2)}) \ldots (z - z_\varkappa^{(m-1)})]^2$, das vom $(2m-2)$-ten Grad und durchweg nicht nega ist, so bleibt links in (13) lediglich $\varepsilon_\varkappa^{(m)} \cdot P(z_\varkappa^{(m)})$ und rechts das Integ über das positive $P(z)$: Also muß $\varepsilon_\varkappa^{(m)}$ positiv sein und in gleicher We jedes andere $\varepsilon_\varkappa^{(\iota)}$. Dies ist der Beweis für die erste der oben angeführ Behauptungen.

Um endlich die letzte zu beweisen, leiten wir durch partielle In gration ab:

$$(14) \quad 0 = \int \alpha_k(z)\,[dV_\varkappa(x) - dS_\varkappa^{(m)}(x)] = \int \alpha_k'(z)\,[S_\varkappa^{(m)}(x) - V_\varkappa^{(m)}(x)]$$

Auch diese Gleichung bleibt, da sie für $k = 0$ bis $2m-1$ gilt, besteh wenn an Stelle von α_k' ein beliebiges Polynom von höchstens $(2m-2)$-t Grad gesetzt wird. Hätte also $S_\varkappa^{(m)} - V_\varkappa$ nicht mehr als $2m-2$ Zeich wechsel $z_1, z_2 \ldots$, so könnte man das Differenzenprodukt $(z-z_1)(z-z_2)$ in (14) an Stelle von α_k' einsetzen und bekäme einen Integranden von k stantem Vorzeichen, dessen Integral — im Gegensatz zu (14) — nicht schwinden kann. Damit ist, über die Behauptung (4) hinaus, gezeigt, *zwei beliebige Verteilungen, die in den ersten $2m$ Momenten übere stimmen, wenigstens $2m-1$ Schnittpunkte aufweisen müssen.*

Die besondere Bedeutung dieses Satzes gerade für die Treppen liegt darin, daß ja eine derartige Linie in jedem horizontalen und jed

ertikalen Stück nur *einmal* von einer andern, monoton ansteigenden inie getroffen werden kann. Da nun eine m-fache Treppe nur $2m-1$ olche Stücke besitzt (die Teile der Horizontalen in der Höhe null und eins ngerechnet), so sieht man, daß sie *in jedem Stück* einmal geschnitten erden muß. Wir können diesem, für uns grundlegenden Ergebnis folende Form geben:

Eine Verteilung $V_x(x)$, die selbst wenigstens m Wachstumstellen ufweist, wird durch Angabe ihrer ersten $2m$ Momente in ihrem anzen Verlauf, an jeder Stelle x, auf ein bestimmtes beschränktes ebiet eingeengt: Liegt der zu x nach (5) *gehörige Wert von z zwischen $z_x^{(\iota)}$ und $z_x^{(\iota+1)}$, so liegt $V_x(x)$ zwischen $S_x^{(m)}(z_x^{(\iota)}-0)$ und $S_x^{(m)}(z_x^{(\iota+1)}+0)$; ällt z mit einem der $z_x^{(\iota)}$ zusammen, so liegt $V_x(x)$ zwischen $S_x^{(m)}(z_x^{(\iota)}+0)$ nd $S_x^{(m)}(z_x^{(\iota)}-0)$. Der Ordinatenunterschied zwischen einer Verteilungsinie $V_x(x)$ und einer ihrer zugeordneten Treppen $S_x^{(m)}(x)$ kann nie rößer sein als eine Stufenhöhe der letzteren.*

6. Die einer Gaußschen Verteilung Φ zugeordneten Treppen $\Psi^{(m)}$. Die in § 3, Gl. (15) definierte Gaußsche Verteilung mit dem Mittelwert a und der Streuung s:

15) $$V(x)=\Phi(z)=\Phi\left(\frac{x-a}{s\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\int e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}}dx$$

immt hinsichtlich der hier in Rede stehenden Probleme eine besondere tellung ein. Zunächst reduziert sich ihre reelle Adjunkte $g(u)$ auf das *rste Glied*; denn nach (1) ist:

') $$g(u)=\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{s^2u^2}{2}}\int e^{-(x-a)u-\frac{(x-a)^2}{2s^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int e^{-\left(\frac{su}{\sqrt{2}}+\frac{x-a}{s\sqrt{2}}\right)^2}d\left(\frac{x-a}{s\sqrt{2}}\right)=1.$$

Es sind also alle zu Φ gehörigen Koeffizienten $c^{(1)}=c^{(2)}=c^{(3)}=\ldots=0$. Hieraus ergeben sich naturgemäß einfache Beziehungen für die nach Abschnitt 4 der Verteilung $\Phi(z)$ zugeordneten Treppen $\Psi^{(m)}$.

Führen wir die Gaußsche Verteilungsdichte $\varphi^{(0)}$ und ihre Ableitungen φ', φ'', …, $\varphi^{(m)}$ ein:

16) $$\varphi^0(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2},\quad \varphi'=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(-2z)e^{-z^2},\quad \varphi''=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(4z^2-2)e^{-z^2},\ldots,$$

o bestätigt man leicht, daß die in Klammer gesetzten Polynome sich ur durch konstante, d. i. von z unabhängige, Faktoren von den Hermiteschen unterscheiden:

16′) $$\varphi^{(m)}=2^m\cdot m!\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\alpha_m(z).$$

Daraus folgt für die in (10′) zur Bestimmung der $\varrho^{(\iota)}$ eingeführten Koeffizienten $A^{(\iota,\lambda)}$ in unserm Fall $dV(x)=\varphi(z)dz$:

$$(16'') \qquad A^{(\iota,\lambda)} = \int \alpha_\iota \alpha_\lambda \varphi \, dz = \int \alpha_\iota \varphi^{(\lambda)} dz \cdot \frac{1}{2^\lambda \cdot \lambda!} = \int \alpha_\lambda \varphi^{(\iota)} \frac{1}{2^\iota \iota!} dz$$

und dieser Ausdruck ist, wie ι- bzw. λ-fache partielle Integration zeig null für $\iota \neq \lambda$. Demnach sind in den linearen Gleichungen (10″) säm liche rechten Seiten null, daher auch alle ϱ und es bleibt $\beta^{(m)} = \alpha$ d. h. *die Stufen der Treppe $\Psi^{(m)}$ liegen an den Nullstellen des m-t Hermiteschen Polynoms.*

Es kommt nun weiter gar nicht darauf an, auch die Stufenhöhen γ von $\Psi^{(m)}$ nach Gl. (12) zu bestimmen, wenn wir nur den Verlauf der Ψ für große m verfolgen wollen. Wir erinnern uns an den in Abschnitt dieses Paragraphen abgeleiteten Satz über die Verdichtung der Nullstell der α_m. Da die Φ-Linie die Treppe $\Psi^{(m)}$ in jeder Stufe schneiden mu kann eine Stufenhöhe nicht größer sein, als der Anstieg der Φ-Linie h zur nächsten Stufe, also nicht größer als $\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}$ mal dem in Abschn. bestimmten größten Abstand zweier Nullstellen von α_m. Nach den E gebnissen des vorangehenden Abschnittes kann sich aber die eine Ve teilung darstellende Linie niemals mehr als um die Höhe einer Treppe stufe von der Treppe selbst unterscheiden. Wir haben also den Sat *In dem Bereich $|z| \leqq z_0 < \sqrt{2m+1}$ gilt*

$$(17) \qquad |\Phi(z) - \Psi^{(m)}(x)| \leqq \psi^{(\iota)} < \frac{1}{2s} \sqrt{\frac{2\pi}{2m+1-z_0^2}}$$

für jedes m, mit der in (5) festgelegten Zuordnung zwischen z und

§ 5.

Beweis der Behauptung III.

1. Die Koeffizienten der Adjunkten von $W_n(x)$. Wenn w die Gl. (2) und (3) des vorangehenden Paragraphen zusammenhalten, gewinnen wir für die Adjunkte q_n des n-ten Integralproduktes W_n d Ausdruck:

$$(1) \quad q_n(u) = \prod_{\varkappa=1}^{n} \left[c_\varkappa^{(0)} + c_\varkappa^{(1)} \left(\frac{s_\varkappa \sqrt{2}}{r_n} u \right) + c_\varkappa^{(2)} \left(\frac{s_\varkappa \sqrt{2}}{r_n} u \right)^2 + c_\varkappa^{(3)} \left(\frac{s_\varkappa \sqrt{2}}{r_n} u \right)^3 + \ldots \right.$$

Andererseits setzen wir $q_n(u)$ entsprechend (3) von § 4, da Streuung von W_n gleich $^1/_2$ ist:

$$(1') \qquad q_n(u) = k_n^{(0)} + k_n^{(1)} u + k_n^{(2)} u^2 + \ldots .$$

Den Koeffizienten $k_n^{(m)}$ von u^m in (1′) erhält man somit, indem m die Summe aller Produkte von der Form

$$(1'') \qquad c_1^{(\mu_1)} c_2^{(\mu_2)}, \ldots, c_n^{(\mu_n)} s_1^{\mu_1} s_2^{\mu_2}, \ldots, s_n^{\mu_n} \left(\frac{\sqrt{2}}{r_n} \right)^m$$

it $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n = m$ bildet. Eine obere Schranke für den Betrag
n $k_n^{(m)}$ wird sich also dann ergeben, wenn man in dem Ausdruck rechts
(1) sowohl die $c_\varkappa^{(\mu)}$ als die $s_\varkappa$ durch obere Schranken für ihre absolute
eträge ersetzt. Mit Rücksicht auf die Bedingung (b 2) von § 3 und
. (3″) in § 4 ersetzen wir daher unter Beachtung von (3a) in § 4 das
odukt rechts in (1) durch

2) $$\left[1 + c^{(3)}\left(\frac{S\sqrt{2}}{r_n}u\right)^3 + c^{(4)}\left(\frac{S\sqrt{2}}{r_n}u\right)^4 + \ldots\right]^n = (1+D)^n$$
$$= 1 + \binom{n}{1}D + \binom{n}{2}D^2 + \ldots + D^n.$$

er Koeffizient von u^m in der Entwicklung des Ausdruckes (2) liefert die
esuchte obere Schranke für $|k_n^{(m)}|$, falls $m > 1$.

Da D mit einem Glied dritter Ordnung in u beginnt, braucht man,
m den Koeffizient von u^m zu finden, in der Entwicklung der n-ten Potenz
echts in (2) nur bis zum Glied $D^{\frac{m}{3}}$ zu gehen. Wir nehmen nun an, es sei

3′) $$n > \frac{2m}{3},$$

ann wachsen die Binomialkoeffizienten in (2) bis zum letzten in Betracht
ommenden und der Ausdruck (2) wird noch überschätzt, wenn wir den
oeffizienten des letzten beibehaltenen Gliedes vor alle setzen, also

3″) $$\binom{n}{\frac{m}{3}}\left[1 + D + D^2 + \ldots + D^{\frac{m}{3}}\right]$$

ir (2) nehmen. Der Ausdruck in der eckigen Klammer in (3″) ist von
nur noch insofern abhängig, als r_n in D vorkommt. Fassen wir die
lieder, die u^m ergeben sollen, zusammen, so hebt sich r_n^m im Nenner
eraus und wir erhalten:

3) $$|k_n^{(m)}| < \binom{n}{\frac{m}{3}}\frac{R_m\sqrt{2}^m}{r_n^m} < \frac{R_m}{\left(\frac{m}{3}\right)!}\frac{n^{\frac{m}{3}}\sqrt{2}^m}{r_n^m} < \frac{R_m}{\left(\frac{m}{3}\right)!}\left[\varepsilon(n)\right]^{\frac{m}{2}}, \qquad (m > 1)$$

o R_m eine von n unabhängige, $\varepsilon(n)$ eine nach Voraussetzung (b 2) mit
achsendem n gegen null gehende Größe bezeichnet. Man sieht also:

*Der Koeffizient $k_n^{(m)}$ von u^m in der Entwicklung der reellen Adjunkten
es n-ten Integralproduktes geht mit wachsendem n und konstantem
$n > 1$ gegen null.*

Es ist weiter nicht schwer, den Ausdruck R_m zu bestimmen, wenn
an beachtet, daß jede Potenz D^k aus lauter Produkten der Form

4′) $$\left(\frac{S\sqrt{2}}{r_n}\right)^{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_k} \cdot c^{(\mu_1)}c^{(\mu_2)}\ldots\ldots c^{(\mu_k)}$$

besteht, wobei die μ die Werte 3, 4, 5, ... durchlaufen. Somit ist

$$(4'') \quad R_m = S^m \sum_{\varkappa=1}^{\frac{m}{3}} \sum_{\mu} c^{(\mu_1)} c^{(\mu_2)} \dots c^{(\mu_k)} = S^m \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{c^2 e}\right)^{\frac{m}{2}} \sum_{\varkappa=1}^{\frac{n}{3}} C^\varkappa \sum_{\mu} \frac{1}{\left(\frac{\mu_1}{2}\right)! \dots \left(\right.}$$

Da μ mindestens gleich 3, so ist jeder Summand der rechts zulet stehenden Summe sicher kleiner als 1! Die Zahl der Summanden i gleich der Zahl der Kombinationen zur Summe $m - 2\varkappa$, gebildet a $\varkappa$ Zahlen der Reihe 1, 2, 3, ..., d. i.

$$(4''') \qquad \binom{m-2\varkappa-1}{\varkappa-1} < \binom{m}{\varkappa-1} \qquad (m \geqq 3$$

Setzt man diesen Wert für die Summe über die μ in (4'') ein u beachtet, daß $C^\varkappa$ höchstens gleich $C^{\frac{m}{3}}$ wird, so erhält man:

$$(4) \quad R_m < S^m \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{c^2 e}\right)^{\frac{m}{2}} C^{\frac{m}{3}} \sum_{\varkappa=1}^{m+1} \binom{m}{\varkappa-1} = S^m \left(1 + \frac{4}{c^2 e}\right)^{\frac{m}{2}} C^{\frac{m}{3}} = C'^m.$$

Dieser Ausdruck wächst im allgemeinen mit m, aber schwächer a $\left(\frac{m}{3}\right)!$, womit die aus Gl. (2) in § 4 folgende Konvergenz jeder einzelne Entwicklung (1') bestätigt wird. Man kann (3) und (4) zusammenfassen

$$(5) \qquad k_n^{(m)} < \frac{C'^m}{\left(\frac{m}{3}\right)!} \varepsilon^{\frac{m}{2}}(n), \qquad \text{für} \qquad m \geqq 3.$$

Für $m = 0, 1, 2$ gilt natürlich, unabhängig von n:

$$(5') \qquad k_n^{(0)} = 1, \qquad k_n^{(1)} = k_n^{(2)} = 0.$$

2. Die den W_n zugeordneten Treppen $T_n^{(m)}$. Nach § 4, 4 gehö zu jeder Verteilung, die mehr als m Wachstumstellen und eine gan Funktion zur reellen Adjunkten besitzt, eine bestimmte m-stufige Trepp die in den ersten $2m$ Koeffizienten der Adjunkten mit der gegeben übereinstimmt. Von den Integralprodukten W_n ist nun leicht zu sehe daß die Zahl ihrer Wachstumstellen mit n *ins Unendliche gehen* mu wenn sie nicht überhaupt schon für jedes $n > n_0$ unendlich ist. D letztere tritt ein, wenn V_{n_0} unendlich viel Wachstumstellen hat. Habe aber sämtliche $V_\varkappa$ nur endlich viele, und zwar $n_\varkappa$, so geht aus der Da stellung Gl. (3) in § 3 hervor, daß die Zahl der Wachstumstellen von V gleich der Summe $n_1 + n_2 + \dots + n_n$ ist. Da nach Voraussetzung (a jedes $V_\varkappa$ mindestens zwei Wachstumstellen haben muß, ist damit die B hauptung erwiesen. Es leuchtet auch ein, daß infolge des Wachsens v r_n mit $\sqrt{n}$ die Wachstumstellen von $W_n(x)$ sich im allgemeinen in jede endlichen Bereich unbeschränkt verdichten.

Nehmen wir nun an, es sei ein festes m vorgeschrieben und zunächst $> m$ gewählt, so daß es sicher eine zu W_n zugeordnete Treppe $T_n^{(m)}$ gibt: Konvergenz der Entwicklung von q_n ist ja mit Gl. (5) (wie schon rher durch die Darstellung (2) in § 4) nachgewiesen. Die m Stufen n $T_n^{m)}$ sind die Nullstellen eines Polynoms $\gamma_n^{(m)}$ (vgl. § 4, 4):

$$\gamma_n^{(m)} = \alpha_m + \sigma_n^{(m-1)} \alpha_{m-1} + \sigma_n^{(m-2)} \alpha_{m-2} + \ldots + \sigma_n^{(0)} \alpha_0,$$

bei die $\sigma_n^{(\iota)}$ die Lösungen der m linearen Gleichungen:

$$\sum_{\iota=0}^{m-1} B_n^{(\iota,\lambda)} \sigma_m^{(\iota)} = -B_n^{(m,\lambda)} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, m-1$$

t der Definition

$$B_n^{(\iota,\lambda)} = \int \alpha_\iota(z)\, \alpha_\lambda(z)\, dW_n(z) \qquad (\iota, \lambda = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

deuten. Die Größen z und x, die allgemein nach (5) in § 4 zusammen-ngen, sind jetzt wegen $a' = 0$ und $s'^2 = \frac{1}{2}$ einander gleich.

Jedes der Produkte $\alpha_\iota \alpha_\lambda$ mit $\iota + \lambda \leqq 2m-1$ kann man durch einen earen Ausdruck in den $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m-1}$ darstellen, wobei aber α_0 nur den Produkten mit $\iota = \lambda$ auftreten kann. Denn andernfalls könnten die in 6″), § 4 behandelten Ausdrücke von der Form $\int \alpha_\iota \alpha_\lambda \varphi\, dz$ unmöglich $\iota + \lambda$ verschwinden, weil $\int \alpha_0 \varphi\, dz = 1$ und $\int \alpha_\iota \varphi\, dz = 0$ für $\iota + 0$ s (16″), § 4 folgt. Da nun rechts in (6′) die oberen Indizes von B emals gleich werden, kommen hier nur α_ι mit $\iota > 0$ und, nach Inte-ation über dW_n, nur $k_n^{(\iota)}$ mit $\iota > 0$ in Betracht. Für diese Koeffizienten t aber Gl. (5) und (5′), d. h. man kann bei festem m durch Vergröße-ng von n die rechte Seite der Gl. (6′) vermöge des Faktors $\varepsilon(n)$ be-big klein machen.

In der Determinante des Gleichungssystems (6′) stehen nur in der uptdiagonale Elemente mit gleichen oberen Indizes. Diese liefern bei twicklung des Produktes $\alpha_\iota \cdot \alpha_\iota$, wie man sich, etwa durch Ausführung r in (16″), § 4 angedeuteten Integration überzeugen kann, das Glied $: 2^\iota \cdot \iota!$. Alle anderen Elemente der Determinante führen wieder zu ößen, die den Faktor $\varepsilon(n)$ enthalten und sonst nur von m abhängig d. Die Determinante unterscheidet sich also bei wachsendem n beliebig nig von dem positiven Wert $2^{-(1+2+\ldots+m-1)}[1 \cdot 1! 2! \ldots (m-1)!]^{-1}$. s Ergebnis dieser Überlegung ist, daß die $|\sigma_m^{(\iota)}|$ *bei festem m und chsendem n unter jeden vorgegebenen Betrag* sinken.

Weitere Folge des Verhaltens der $\sigma_m^{(\iota)}$ ist, daß der Unterschied zwischen m Polynom $\gamma_n^{m)}$ und dem Hermiteschen Polynom α_m in der Weise t wachsendem n sich der Null nähert, daß sämtliche Koeffizienten von $^{n)}$ gegen die entsprechenden von α_m konvergieren. Dabei hat $\gamma_n^{(m)}$ nach

dem in § 4, 4 gegebenen Beweis durchaus reelle Nullstellen. Da nun di Wurzeln einer algebraischen Gleichung *stetige* Funktionen der Gleichungs koeffizienten sind, so können wir schließen: Die m Wurzeln von $\gamma_n^{(m)}$, als die Stufen der Treppe $T_n^{(m)}$ nähern sich mit wachsendem n und festem mehr und mehr den Nullstellen des Hermiteschen Polynoms α_m un erhalten den

Satz (1): *Man kann stets zu gegebenem m ein $n_1 > m$ so bestimmen daß für $n > n_1$ der Abstand zwischen den Nullstellen von α_m und de Wachstumstellen von $T_n^{(m)}$ kleiner als ein beliebig vorgegebener Betrag wird*

Die Stufen*höhen* der Treppe $T_n^{(m)}$ sind nach Gleichung (12) des § 4 durc

$$(6''') \qquad t_n^{(\iota)} = \int \frac{\gamma_n^{(m)}(z)\, dW_n(z)}{(z - z_n^{(\iota)})\, \gamma'^{(m)}_n(z)_n^{(\iota)}} \qquad (\iota = 1, 2, \ldots, m$$

gegeben, worin $z_n^{(\iota)}$ die Nullstellen von $\gamma_n^{(m)}$ bezeichnen. Was hier a Integrand neben dem Differential dW_n erscheint, ist ein Polynom vo $(m-1)$-ten Grad, das sich wieder als Linearform in den $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-}$ ausdrücken läßt. Daher ist jedes $t_n^{(\iota)}$ ein linearer Ausdruck in de $k_n^{(0)}, k_n^{(1)}, \ldots, k_n^{(m-1)}$. Die Koeffizienten dieses Ausdruckes hängen lediglic von $\gamma_n^{(m)}$ ab und dieses ist nach (6) durch die $k_n^{(0)}, k_n^{(1)}, \ldots, k_n^{(2m-1)}$ vo ständig bestimmt. Da beide Abhängigkeiten *stetig* sind, sind auch die *stetige Funktionen der Koeffizienten* $k_n^{(0)} \ldots k_n^{(2m)}$.

Oben ist gezeigt worden, daß jeder einzelne Koeffizient $k_n^{(\iota)}$ für $\iota >$ mit wachsendem n gegen null geht. Andrerseits sind nach § 4, 6 d Koeffizienten der Gaußschen Funktion Φ, bis auf den ersten, der imm konstant $= 1$ ist, gleich null. Wenn daher m eine feste Zahl ist, m der Wert von $t_n^{(\iota)}$, der eine stetige Funktion der $k_n^{(\iota)}$ ist, mit wachsendem stetig jenem Wert zustreben, den man erhält, wenn man $k_n^{(0)} = 1$ u $k_n^{(\iota)} = 0$ für $\iota > 1$ setzt, oder kurz dem Wert $\psi^{(\iota)}$, der sich für die Stufe höhen der Treppe $\Psi^{(m)}$ einer Gaußschen Verteilung ergibt. Wir hab somit den

Satz (2): *Man kann stets zu einem gegebenen m ein $n_2 > m$ bestimmen, daß für $n > n_2$ der Unterschied zwischen der ι-ten Stufe höhe $t_n^{(\iota)}$ von $T_n^{(m)}$ und der analogen Stufenhöhe $\psi^{(\iota)}$ von $\Psi^{(m)}$, oder au der zwischen der Treppenhöhe von $T_n^{(m)}$ in der ι-ten Stufe und der e sprechenden Treppenhöhe der Treppe $\Psi^{(m)}$ beliebig klein wird.*

3. Abschluß des Beweises. Um nunmehr zu zeigen, daß $W_n($ mit wachsendem n gleichmäßig gegen $\Phi(x)$ konvergiert, wählen wir z nächst ein $x_0 > 0$ so groß, daß $\Phi(x)$ für $|x| > x_0$ sich um weniger al von dem Grenzwert 0 bzw. 1 unterscheidet, also so daß

$$(7) \qquad |1 - \Phi(x_0)| < \frac{1}{4x_0^2} < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad x_0 > \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon}}.$$

ierauf wählen wir ein m so, daß die in § 4, 6 ermittelte obere Grenze r die Stufenhöhe $\psi^{(\iota)}$ der Treppe $\Psi^{(m)}$ nicht größer als $\frac{\varepsilon}{8}$ wird; also, da tzt $\varepsilon = 1:\sqrt{2}$, nach (17) in § 4:

$$\psi^{(\iota)} \leqq \sqrt{\frac{\pi}{2m+1-x_0^2}} < \frac{\varepsilon}{8}, \quad 2m > x_0^2 - 1 + \pi\left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^2 \tag{7'}$$

egt einmal m fest, so bestimmen wir nach dem ersten der im voran-henden Abschnitt gewonnenen Sätze n_1 so, daß für $n > n_1$ der Ab-and $d_n^{(\iota)}$ zwischen einer Nullstelle von α_m und der zugehörigen Stufe on $T_n^{(\iota)}$ kleiner ist als der kleinste Abstand zweier aufeinanderfolgender ullstellen von α_m, also so, daß (vgl. § 4, 3):

$$d_n^{(\iota)} < \frac{\pi}{\sqrt{2m+1}} \quad \text{für} \quad n > n_1, \ \iota = 1, 2, \ldots, m. \tag{7''}$$

erner sei nach dem zweiten Satz des vorangehenden Abschnittes n_2 derart ewählt, daß der Unterschied zwischen der ι-ten Stufenhöhe von $T_n^{(m)}$ und on $\Psi^{(m)}$ nicht größer als $\varepsilon : 8(m+1)$ ist, also

$$|t_n^{(\iota)} - \psi^{(\iota)}| < \frac{\varepsilon}{8(m+1)} \quad \text{für} \quad n > n_2, \ \iota = 1, 2, \ldots, m. \tag{7'''}$$

edeutet dann n_0 die größere der beiden Zahlen n_1 und n_2, so behaupten r, daß

$$|W_n(x) - \Phi(x)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n > n_0$$

eichmäßig für alle Werte von x von $-\infty$ bis $+\infty$.

Denn zunächst kann sich innerhalb des Bereiches $|x| \leqq x_0$ die Höhe r Treppe $T_n^{(m)}$ von der Höhe der Treppe $\Psi^{(m)}$ an der gleichen Stelle, rmöge (7″) nicht um mehr unterscheiden, als um eine Stufenhöhe $\psi^{(\iota)}$, rmehrt um die Höhendifferenz der beiden Treppen in Punkten gleicher ufenzahl. Es ist also nach (7′) und (7‴)

$$|T_n^{(m)}(x) - \Psi^{(m)}(x)| < \frac{\varepsilon}{8} + \frac{m\varepsilon}{8(m+1)}. \tag{8'}$$

eiters kann nach dem Schlußsatz in § 4, 5 der Abstand zwischen W_n und $^{(m)}$ nicht größer sein als das größte $t_n^{(\iota)}$ und der zwischen Φ und $\Psi^{(m)}$ cht größer als das größte $\psi^{(\iota)}$, also nach (7′) und (7‴):

$$|W_n(x) - T_n^{(m)}(x)| < \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8(m+1)}, \tag{8''}$$

$$|\Phi(x) - \Psi^{(m)}(x)| < \frac{\varepsilon}{8}. \tag{8'''}$$

urch Addition von (8′), (8″) und (8‴) ergibt sich

$$|W_n(x) - \Phi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad |x| \leqq x_0, \tag{a}$$

womit ein Teil von (8) erledigt ist. Nun geht aber $W_n(x)$ ebenso w $\Phi(x)$ außerhalb $|x| < x_0$ *monoton* gegen null bzw. gegen 1 und unte scheidet sich nach (7) und (8a) an der Stelle x_0 höchstens um ε v diesen Grenzwerten. Daher folgt (8) auch für alle Werte von x für d $|x| > x_0$.

Damit ist die Behauptung III *des* § 3 *in vollem Umfang erwiese*

4. Rückblick auf den Beweisansatz in § 3. In § 3 haben w zum Beweise der Behauptung III die Gleichung (25) abgeleitet:

$$(9) \qquad \overline{W}_n(x) - \Phi(x) = -\frac{1}{2\pi} \Re \int \frac{e^{-uxi}}{ui} \left[p_n(u) - e^{-\frac{u^2}{4}} \right] du,$$

worin $p_n(u)$ die komplexe Adjunkte von W_n bedeutete und nach (12) Produkt der analog definierten komplexen Adjunkten $f_\varkappa$ der $V_\varkappa(x)$ erschie Daß der Klammerausdruck rechts in (9) für jeden endlichen Bereich von mit wachsendem n gleichmäßig gegen null geht, war eine Folgerung a dem Satz I des § 1. Zum Nachweis der Behauptung III war es ab noch notwendig zu zeigen, daß das über den unendlichen Bereich von erstreckte Integral (9) der Null zustrebt. Es fragt sich, in welchem Z sammenhang der von uns jetzt direkt geführte Beweis für III mit dies Formulierung steht.

Zunächst ist zu sagen, daß die Übertragung der in § 4, 1 und 2 üb die reellen Adjunkten angestellten Überlegungen sofort ergeben würd Auch jedes $f_\varkappa$ und jedes p_n ist eine *ganze* Funktion der Variablen u. D Koeffizienten von $f_\varkappa$ sind, bis auf Zahlenfaktoren, die die Konverge herbeiführen, unmittelbar die „Momente" der Verteilung $V_\varkappa(x)$. Weit würde eine analoge Untersuchung wie die in § 5, 1 zeigen, daß die Koe zienten der Entwicklung von p_n mit wachsendem n zwar nicht gegen nu aber *gegen die Koeffizienten der Entwicklung von* $e^{-\frac{u^2}{4}}$ konvergieren. liegt darin, wie man sieht, nur ein sehr spezieller Fall des Satzes I, nä lich der Fall, daß die dort behandelten $f_\varkappa$ in der Umgebung der a gezeichneten Stellen $a_\varkappa$ Potenzentwicklungen zulassen (Konvergenz in ganzen Ebene ist durchaus nicht erforderlich, vgl. § 6, 2), bei denen die Koe zienten jeder Ordnung eine beschränkte Folge bilden. Unter dieser Vora setzung kann man die Behauptung I geradezu dahin aussprechen, daß Koeffizienten der Entwicklung des Produktes $p_n(u)$ gegen die der Entwi lung von $e^{-u^2:4}$ konvergieren. So ordnet sich der erste, im Abschnitt 1 vorstehenden Paragraphen enthaltene Teil unseres Beweises den frühe Betrachtungen unter.

Der zweite Teil des Beweises, der sich auf die Beziehungen zwisch einer Verteilung $V_\varkappa(x)$ und den ihr zugeordneten Treppen $S_\varkappa^{(m)}(x)$, b

vischen $W_n(x)$ und $T_n^{(m)}(x)$ erstreckt, enthält nun gerade das, was zum achweis des Verschwindens von (9) noch ausstand. Denn im wesentchen ist gezeigt worden: *Wenn die Momente m-ter Ordnung der Verilungen* $W_1(x), W_2(x), \ldots$ *gegen das m-te Moment von* $\Phi(x)$ *konvereren, so geht* $W_n(x) - \Phi(x)$ *gegen null*[7]). Im Anschluß an (9) ausgerochen, lautet der Satz: Das Integral rechts in (9) hat den Grenzwert ıll, sobald die Potenzentwicklung des Klammerausdruckes gliedweise gen null konvergiert. Der Wert des Klammerausdruckes selbst geht, e wir wissen (Beispiel in § 3, 7), *nicht* im ganzen Integrationsbereich gen null.

Man darf aber nicht außer acht lassen, daß der eben ausgesprochene tz über das Integral (9) nur vermöge der besonderen Bedeutung des lammerwertes für die gesuchte Funktion $W_n - \Phi$, nicht etwa für jedes tegral $\int e^{-xui} G(u)du$, wo G eine ganze Funktion ist, gilt. (Damit ıe solche Funktion G die Entwicklung einer reellen Adjunkten sei, issen die Koeffizienten so beschaffen sein, daß z. B. (10) in § 4 positiv finit wird.) Er besteht beispielsweise nicht ohne weiteres in dem Fall r Gl. (19‴) von § 3, die wir unter Verwendung von (15), § 3 in der rm schreiben:

‴) $$w_n(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} = \frac{1}{2\pi} \Re \int e^{-uxi} [p_n(u) - e^{-\frac{u^2}{4}}] du.$$

Denn wenn sämtliche $V_\varkappa(x)$ und daher auch die $W_n(x)$ Treppen von dlicher Stufenzahl sind, so hat die Ableitung w_n von W_n für jedes n einer mit n wachsenden Anzahl von Stellen den Wert ∞. Andererseits ben wir für den besonderen Fall, in dem sämtliche $v_\varkappa(x)$ und daher ch die $w_n(x)$ Funktionen von beschränkter Schwankung sind, das Behen von (9‴) oben direkt nachgewiesen (§ 3, 6).

§ 6.

Korollare zu den Sätzen des § 3.

1. Schwächeres und stärkeres Anwachsen von $\Sigma s_\varkappa^2$. In der tten der Voraussetzungen (b 2) in § 3 ist gefordert worden, daß die mme der Streuungen stärker als mit der $^2/_3$ Potenz von n ins Unendıe wächst. Die Überlegungen in § 5, 1, insbesondere Gl. (3) zeigen,

[7]) Diesen Satz, der die wesentliche Schwierigkeit des Beweises von III in sich ließt, hat P. L. Tschebyschef 1873 ohne Ableitung angegeben, Journal de Liou-e, sèr. II, t. 19. Einen Beweis auf Grund der Theorie der Kettenbruch-Entwicklung timmter Integrale gab zuerst Markoff 1884 (russisch), dann Tschebyschef selbst uvres, Bd. II, S. 421 und Bd. II, S. 443). Vgl. auch die Monographie von A. Wassilief N. Delaunay, „P. L. Tschebyschef", Leipzig 1900, Kap. VI und VII.

daß für den Beweis der Behauptung III dieses Verhalten von r_n^2 nicht n hinreichend, sondern auch notwendig ist. Dagegen wird diese Bedingu im Falle der Behauptungen IV und V gegenstandslos, da hier zufolge d besonderen Voraussetzungen (über das Vorhandensein eines Paares v endlichen Wachstumstellen bzw. über die beschränkte Gesamtschwankun die s_x^2 eine von null verschiedene untere Schranke besitzen. Dies ist den Abschn. 5 und 6 des § 3 ausdrücklich nachgewiesen worden. W können daher aussprechen:

IV_1, V_1. *Die Voraussetzung* (a 2) *und die letzte der drei Ungl chungen* (b 2) *kann im Falle der Behauptungen* IV *und* V (*auch für d Beweis der Gl.* (III)) *fortgelassen werden.*

2. Einschränkung der Bedingungen im Unendlichen. M den Voraussetzungen (a 1) und (b 1) in § 3 sind den Verteilungen V_x b stimmte Einschränkungen für das Verhalten von dV_x im Unendlich auferlegt worden, deren Bedeutung hauptsächlich darin bestand, daß d Existenz der m-ten Momente jeder Verteilung und die Beschränktht ihrer Folge bei festem m sichergestellt wurde. Nun ist bei dem Bew der Behauptungen IV und V in § 3 überhaupt nur von den Moment erster, zweiter und dritter Ordnung Gebrauch gemacht worden. W haben also zunächst das Korollar:

IV_2, V_2. *Die Behauptungen* IV *und* V *des* § 3 *gelten auch un Weglassung der Voraussetzungen* (a 1) *und* (b 1), *also ohne jede weit Einschränkung für* dV_x *im Unendlichen, falls zu den* (*ersten beide Voraussetzungen* (b 2) *noch die hinzugefügt wird, daß die Folge der drit Momente der* V_x *beschränkt ist*:

$$(1) \qquad \int (x-a_x)^3 \, dV_x(x) < K .$$

Hierbei genügt es, die Momente, wie es hier angeschrieben ist, auf ursprüngliche Variable x bzw. $x-a_x$ zu beziehen, statt auf $(x-a_x)$: da ja die s_x^2 eine von null verschiedene untere Schranke haben.

Bei dem Beweis der Behauptung III in § 4 und 5 ist von den V aussetzungen (a 1) und (b 1) vor allem zu dem Zwecke Gebrauch gema worden, um die Entwickelbarkeit der reellen Adjunkten g_x einer V teilung V_x sowie die Beschränktheit der Koeffizientenfolge $c_x^{(m)}$ bei fest m nachzuweisen. Es ist klar, daß man in (a 1) und (b 1) noch et schwächer wachsende Funktionen statt $e^{c^2 x^2}$ einsetzen könnte, ohne Folgerungen zu beeinträchtigen. Darüber hinaus sieht man auch lei daß die Konvergenz der Entwicklung in der ganzen Ebene nicht wes lich ist, sondern die in der Umgebung des Nullpunktes genügt. A man kann sogar durch eine kleine Abänderung des Beweisganges die V aussetzung (a 1) darauf beschränken, daß die Momente beliebig ho

rdnung *endlich* sind. Denn dem Zusammenhang zwischen den Koeffienten $c_\varkappa^{(m)}$ der $V_\varkappa$ und $k_n^{(m)}$ der Integralprodukte, wie er in § 5, 1 dargelegt wurde, liegt die folgende *Identität in den Hermiteschen Polynomen* zugrunde:

$$\alpha_m\left(\sum_{\varkappa=1}^{n}\frac{x_\varkappa-a_\varkappa}{r_n}\right)\equiv\left(\frac{\sqrt{2}}{r_n}\right)^m\sum_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n} s_1^{\mu_1}\alpha_{\mu_1}(z_1)\cdot s_2^{\mu_2}\alpha_{\mu_2}(z_2)\ldots s_n^{\mu_n}\alpha_{\mu_n}(z_n),$$

obei die Summe rechts so zu bilden ist, daß $\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n=m$, und

$$z_\varkappa=\frac{x_\varkappa-a_\varkappa}{s_\varkappa\sqrt{2}},\qquad r_n^2=2(s_1^2+s_2^2+\ldots+s_n^2)$$

lt. Daraus folgt sofort für die Koeffizienten der Adjunkten von W_n:

$$k_n^{(m)}=\int\alpha_m(u)\,dW_n(u)=\int\!\!\int\ldots\int\alpha_m\left(\sum_{\varkappa=1}^{n}\frac{x_\varkappa-a_\varkappa}{r_n}\right)dV_1(x_1)\ldots dV_n(x_n)$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{r_n}\right)^m\sum_{\mu} s_1^{\mu_1}s_2^{\mu_2}\ldots s_n^{\mu_n}\int\alpha_{\mu_1}(z_1)\,dV_1(x)\cdot\int\alpha_{\mu_2}(z_2)\,dV_2(x)\ldots\int\alpha_{\mu_n}(z_n)\,dV_n(z)$$

nd daher, mit Rücksicht auf die Bedeutung von $c_\varkappa^{(m)}$, die Formel (1″) § 5 für $k_n^{(m)}$. Man beweist (2) am einfachsten, indem man für Verteilungen, die den Voraussetzungen des § 3 genügen, so wie es oben geschehen ist, das Multiplikationsgesetz für die reellen Adjunkten ableitet nd dann beiderseits die Koeffizienten gleicher Potenzen von u gleichsetzt. interher kann man sich von den Voraussetzungen bezüglich der $V_\varkappa$ unhängig machen, da (2) lediglich eine Eigenschaft der Hermiteschen olynome darstellt.

Die Erweiterung des Geltungsbereiches unseres Satzes, zu der wir so langt sind, lautet:

III_2. *Die Behauptung* III *des* § 3 *gilt auch, wenn an Stelle der oraussetzung* (a 1) *nur verlangt wird, daß für jede Verteilung* $V_\varkappa$ *die omente* $\int z^m dV_\varkappa(x)$ *jeder Ordnung* m *existieren und an Stelle der oraussetzung* (b 1), *daß die Folgen der Momente sämtlicher Verteilungen i festem* m *beschränkt sind.*

Praktisch wird man von dieser Verallgemeinerung wohl selten Gebrauch achen, da die empirisch gegebenen Verteilungen im Endlichen begrenzt nd (und hierbei nicht mit dem Grenzwert null der Streuungen gerechnet rden muß), so daß die Voraussetzungen (a 1) und (b 1) von § 3 von rnherein erfüllt sind, während für „theoretische" Verteilungen in der gel der Satz IV_2 oder V_2 eintreten wird.

3. Erweiterung durch Einführung linearer Verbindungen att einfacher Summen. Die Definition des Integralproduktes in , 1 kann in symmetrischer Form wie folgt geschrieben werden:

$$(4) \qquad dW_n(u) = \int\int \dots \int dV_1(x_1)\, dV_2(x_2) \dots dV_n(x_n),$$

wenn hinzugefügt wird, daß die Integration rechts *bei konstanter Summ* $x_1 + x_2 + \dots + x_n = x$ durchzuführen ist und u eine bestimmte linear Funktion von u darstellt. Wie wir gesehen haben, geht $W_n(u)$, wen diese lineare Funktion die durch (7) und (7′) in § 3 gegebene Form b sitzt, mit wachsendem n gegen $\Phi(u)$. Oft wird nun die Aufgabe in d Form gestellt, daß die Integration (4) nicht bei konstanter Summ sondern unter Festhaltung einer gewissen *linearen Verbindung* der $x_\varkappa$ z bilden ist:

$$(4') \qquad h_1^{(n)} x_1 + h_2^{(n)} x_2 + \dots + h_n^{(n)} x_n = x, \qquad (n = 1, 2, \dots$$

Hierbei haben wir die n Koeffizienten auch noch von dem Index des Integralproduktes abhängig angesetzt. Liegen sämtliche $h_\varkappa^{(n)}$ *in end lichen Grenzen*, so folgt durch Transformation der Variablen sofort, da $\lim_{n=\infty} W_n(u) = \Phi(u)$, wenn jetzt

$$(4'') \qquad u = r_n x + b_n \quad \text{mit} \quad r_n^2 = 2 \sum_{\varkappa=1}^{n} h_\varkappa^2 s_\varkappa^2, \qquad b_n = \sum_{\varkappa=1}^{n} h_\varkappa a_\varkappa$$

gesetzt wird und $a_\varkappa$ bzw. $s_\varkappa^2$ Mittelwert und Streuung von $V_\varkappa$ bezeichne Natürlich kann man hier, wie auch in dem Fall, daß alle $h = 1$, auc eine beliebige *endliche* Transformation mit der Variablen u vornehmen

Andererseits ist es klar, daß wenn die $h_\varkappa^{(n)}$ die genannte Bedingun nicht erfüllen, die Anwendung unserer Resultate allgemein überhaup nicht möglich ist[8]). Nur der folgende Satz kann ausgesprochen werden

III_3, IV_3, V_3: *Die Behauptungen* III, IV *und* V *des* § 3 *gelte auch für die in* (4) (4′) (4″) *gegebene erweiterte Definition des Integra produktes, falls an Stelle der Voraussetzungen* (a 2) *und* (b 2) *folgend treten*:

$$(a\,2''') \qquad h_\varkappa s_\varkappa \neq 0$$

$$(b\,2''') \qquad |h_\varkappa a_\varkappa| < A, \qquad |h_\varkappa^2 s_\varkappa^2| < S^2, \qquad \frac{n^{\frac{2}{3}}}{\sum_{\varkappa=1}^{n} h_\varkappa^2 s_\varkappa^2} < \varepsilon(n).$$

4. Verteilungen in mehreren Dimensionen. Die Sätze des § gestatten auch eine — für die Anwendungen sehr wichtige — Ausdehnun auf den Fall von Verteilungen mit *mehreren unabhängigen Variable* Es sei wieder wie in § 2, 4 das Zeichen $\bar{x}$ (spr. x-Vektor) ein Symb für k Veränderliche $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$. Unter einer *Verteilung* $V_\varkappa(\bar{x})$ i

[8]) Ein Beispiel für einen solchen Fall, in dem W_n nicht gegen Φ konvergie siehe bei F. Hausdorff, Leipz. Ber. 1901, S. 166.

dimensionalen Raum verstehen wir eine reelle, in bezug auf jede der Variablen monotone, nicht abnehmende Funktion, die für $x^{(1)} = x^{(2)} = \ldots = x^{(k)} = -\infty$ den Wert null, für $x^{(1)} = x^{(2)} = \ldots = x^{(k)} = \infty$ den Wert 1 sitzt und an jeder Stelle ihren oberen Grenzwert annimmt. Durch zwei ktoren $\bar{a}$, $\bar{b}$, die der Bedingung $a^{(\iota)} \leqq b^{(\iota)}$ $(\iota = 1, 2, \ldots, k)$ genügen, rd ein von Parallelen zu den Koordinatenebenen begrenzter Raumteil stimmt, dessen Koordinaten $\xi^{(\iota)}$ die Ungleichungen $a^{(\iota)} < \xi^{(\iota)} \leqq b^{(\iota)}$ erllen. Zu jedem solchen Raumteil gehört ein gewisser durch $V_\varkappa(\bar{x})$ bemmter Betrag, den wir mit $V_\varkappa(\bar{a}, \bar{b})$ bezeichnen wollen und der dadurch finiert ist, daß $V_\varkappa(\bar{x}) = V_\varkappa(-\infty, \bar{x})$ und daß für einen Raumteil $\bar{a}$, $\bar{b}$, r in zwei oder mehrere andere Raumteile der betrachteten Art zerfällt, e Beträge sich addieren. Sind die Koordinaten $a^{(\iota)}$ und $b^{(\iota)}$ gegeben, so ellt sich $V(\bar{a}, \bar{b})$ als eine Summe von 2^k Funktionswerten $V(\bar{x})$ dar, obei die Komponenten der $\bar{x}$ aus den sämtlichen Permutationen der $a^{(\iota)}$ d $b^{(\iota)}$ mit abwechselndem Vorzeichen bestehen, z. B. für $k = 3$:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = V(b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}) - V(a^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}) + V(a^{(1)}, a^{(2)}, b^{(3)}) - V(b^{(1)}, a^{(2)}, b^{(3)})$$
$$+ V(a^{(1)}, b^{(2)}, a^{(3)}) - V(b^{(1)}, b^{(2)}, a^{(3)}) + V(b^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}) - V(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}).$$

Das Stieltjessche Integral einer stetigen Funktion $\varphi(\bar{x})$ über den aum $\bar{a}$, $\bar{b}$, das wir durch $\int_{(\bar{a}, \bar{b})} \varphi(\bar{x})\, dV_\varkappa(\bar{x})$ bezeichnen, ist dann definiert s der Grenzwert einer Summe, deren Glieder die Form $\varphi(\xi_\iota) \cdot V_\varkappa(\bar{a}_\iota, \bar{b}_\iota)$ ben, wobei die Raumteile $\bar{a}_\iota$, $\bar{b}_\iota$ durch eine unbegrenzt enger werdende tervallteilung des Bereiches $\bar{a}$, $\bar{b}$ entstehen. Hat $\varphi(\bar{x})$ Unstetigkeitsellen erster Art, so soll unter dem Integral wieder der *obere* Grenzwert r Summe verstanden werden. Bei Integralen, die über den ganzen undlichen Raum zu erstrecken sind, lassen wir die Bezeichnung der Grenzen eder weg.

Mittelwert einer k-dimensionalen Verteilung ist der k-dimensionale ktor $\bar{a}_\varkappa$:

$$) \qquad \bar{a}_\varkappa = \int \bar{x}\, dV_\varkappa(\bar{x}), \qquad a^{(\iota)} = \int x^{(\iota)}\, dV_\varkappa(\bar{x}) \qquad (\iota = 1, 2, \ldots, k);$$

reuung die k-reihige symmetrische Matrix $\bar{s}_\varkappa$ mit den Komponenten

$$') \qquad s_\varkappa^{(\iota, \lambda)} = \int (x^{(\iota)} - a^{(\iota)})\,(x^{(\lambda)} - a^{(\lambda)})\, dV_\varkappa(\bar{x}),$$

ren quadratische Form positiv definit ist, weil

$$'') \qquad \int \Big\{ \sum_\iota u^{(\iota)} (x^{(\iota)} - a_\varkappa^{(\iota)}) \Big\}^2 dV_\varkappa(\bar{x}) > 0,$$

enn der Fall, daß $V_\varkappa(\bar{x})$ nur auf einer einzigen Ebene des k-dimensionalen aumes Wachstumstellen hat, ausgeschlossen wird (Voraussetzung (a 2)).

Als *komplexe Adjunkte* definieren wir:

$$(6) \qquad f_n(\bar{a}_\varkappa + \bar{u}) = \int e^{\sum_\iota u^{(\iota)}\left(x^{(\iota)} - a_\varkappa^{(\iota)}\right) i} \, dV_\varkappa(\bar{x}).$$

Diese Funktionen entsprechen den in § 2, 4 gemachten Annahmen fü $u = 0$ (abgesehen vom Faktor 2):

$$(6') \quad f_\varkappa(0) = 1; \quad \frac{\partial f_\varkappa(0)}{\partial u^{(\iota)}} = 0; \quad \frac{\partial^2 f_\varkappa(0)}{\partial u^{(\iota)} \partial u^{(\lambda)}} = -s_\varkappa^{(\iota,\lambda)}; \quad \left| \frac{\partial^3 f_\varkappa(0)}{\partial u^{(\iota)} \partial u^{(\lambda)} \partial u^{(\nu)}} \right| < C$$

Den übrigen Voraussetzungen des § 1, nämlich $|f_\varkappa| < 1$ für $\bar{u} \neq 0$ und den Bedingungen hinsichtlich des Verhaltens im Unendlichen genüge die $f_\varkappa$ bei analogen Einschränkungen für die $V_\varkappa$, wie sie in § 3 angegeben wurden.

Unter dem n-ten *Integralprodukt* der $V_\varkappa(\bar{x})$ verstehen wir di k-dimensionale Verteilung

$$(7) \qquad W_n(\bar{z}) = \int\int \ldots$$

$$\int V_n(\bar{x} - \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \ldots - \bar{x}_{n-1}) \, dV_{n-1}(\bar{x}_{n-1}) \, dV_{n-2}(\bar{x}_{n-2}) \ldots dV_1(\bar{x}_1),$$

wobei die Additionen nach den Regeln der Vektorrechnung, d. h. komponentenweise auszuführen sind. Den Zusammenhang von $\bar{z}$ und $\bar{x}$ wolle wir mit

$$(7') \qquad \bar{x} = \sqrt{n}\,\bar{z} + \bar{b}_n, \qquad \bar{z} = \frac{\bar{x} - \bar{b}_n}{\sqrt{n}}, \qquad \bar{b}_n = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_n$$

ansetzen und dabei der Einfachheit halber annehmen, daß die Summ der $s_\varkappa^{(\iota,\lambda)}$ nicht nur, wie es der dritten Voraussetzung (b 2) in § 3 entsprechen würde, stärker als mit $n^{\frac{2}{3}}$, sondern genau mit n anwächst. E seien also die Größen

$$(7'') \qquad h_n^{(\iota,\lambda)} = \frac{r_n^{(\iota,\lambda)}}{n} = \frac{1}{n} \sum_\varkappa s_\varkappa^{(\iota,\lambda)}$$

durchaus endlich (wie in § 2, 4). Aus (7') und (7'') folgt dann, daß de Mittelwert von W_n null, die Streuung gleich $\overline{\overline{h}}_n$, d. h. durch die Matri der $h_n^{(\iota,\lambda)}$ gegeben ist, deren quadratische Form wieder positiv definit se Für die komplexe Adjunkte $p_n(\bar{u})$ des Integralproduktes von $W_n(\bar{x})$ e gibt sich danach:

$$(8) \qquad p_n(\bar{u}) = \int e^{\sum_\iota u^{(\iota)} x^{(\iota)} i} \, dW_n(\bar{x})$$

$$= \int\int \ldots \int e^{\sum_{\varkappa,\iota} \left(x_\varkappa^{(\iota)} - a_\varkappa^{(\iota)}\right) \frac{u^{(\iota)}}{\sqrt{n}} i} \, dV_1(\bar{x}_1) \ldots dV_n(\bar{x}_n)$$

$$= f_1\left(\bar{a}_1 + \frac{\bar{u}}{\sqrt{n}}\right) \cdot f_2\left(\bar{a}_2 + \frac{\bar{u}}{\sqrt{n}}\right) \cdot \ldots f_n\left(\bar{a}_n + \frac{\bar{u}}{\sqrt{n}}\right).$$

Nach Satz I_4 von § 2 ist somit

$$\text{'}) \qquad \lim_{n=\infty} p_n(\bar{u}) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{\iota,\lambda} h_n^{(\iota,\lambda)} u^{(\iota)} u^{(\lambda)}}$$

Wenn man die quadratische Form $\sum h_n^{(\iota,\lambda)} z^{(\iota)} z^{(\lambda)}$ durch Transformation r $z^{(\iota)}$ in $\zeta^{(\iota)}$ in eine Summe von Quadraten verwandelt:

$$\text{''}) \qquad \sum_{\iota,\lambda} h_n^{(\iota,\lambda)} z^{(\iota)} z^{(\lambda)} \equiv \sum_{\iota=1}^{k} H_n^{(\iota)} \zeta^{(\iota)2},$$

nimmt (8′) die Form an:

$$\text{'''}) \qquad \lim_{n=\infty} p_n(\bar{z}) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{\iota} H_n^{(\iota)} \zeta^{(\iota)2}}.$$

Andererseits findet man, daß für eine Gaußsche Verteilung in k mensionen:

$$\Phi\left(\frac{\xi_1}{\sqrt{2H_1}}\right)\Phi\left(\frac{\xi_2}{\sqrt{2H_2}}\right)\cdots\Phi\left(\frac{\xi_k}{\sqrt{2H_k}}\right) \equiv \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^k H_1 H_2 \ldots H_k}} \int_{\bar{\xi}} e^{-\sum_{\iota}\frac{\xi_\iota^2}{2H_\iota}} d\xi_1 \ldots d\xi_k$$

nach (6) gebildete komplexe Adjunkte den Wert

$$\text{'}) \qquad e^{-\frac{1}{2}\sum_{\iota} H_\iota \xi_\iota^2}$$

sitzt. Demnach wird in Analogie zu den eindimensionalen Sätzen des zu schließen sein, daß — bei geeigneten Annahmen über das Verten der $V_\varkappa(\bar{x})$ — $W_n(\bar{x})$ gegen einen Ausdruck analog (9) konvert. Wir stellen daher den Satz hin:

III_4, IV_4, V_4. *Wenn man die Voraussetzungen* (a1)(a2) *und* (b1)(b2) § 3 *auf k-dimensionale Verteilungen sinngemäß erweitert, so ergibt h für das mit* (7) *definierte n-te Integralprodukt*:

$$\text{I}_4) \qquad \lim_{n=\infty} W_n(\bar{x}) = \Phi\left(\frac{\xi^{(1)}}{\sqrt{2H_n^{(1)}}}\right)\Phi\left(\frac{\xi^{(2)}}{\sqrt{2H_n^{(2)}}}\right)\cdots\Phi\left(\frac{\xi^{(k)}}{\sqrt{2H_n^{(k)}}}\right);$$

Falle die $V_\varkappa(\bar{x})$ nach dem Volumelement $dx^{(1)}\,dx^{(2)}\ldots dx^{(k)}$ gemmene Ableitungen $v_\varkappa(\bar{x})$ haben, die beschränkt und von gleichmäßig schränkter Schwankung sind, auch für die analog gebildete Ableitung $(\bar{x})$ von $W_n(\bar{x})$:

$$\text{'}_4) \qquad \lim_{n=\infty} w_n(\bar{x}) = \frac{e^{-\sum_{\iota}\frac{\xi^{(\iota)2}}{2H_n^{(\iota)}}}}{\sqrt{(2\pi)^k H_n^{(1)} H_n^{(2)} \ldots H_n^{(k)}}};$$

llich, wenn die $V_n(\bar{x})$ nur in den Punkten eines k-dimensionalen tters Wachstumstellen haben, wobei nach jeder Koordinatenrichtung

wenigstens einmal zwei benachbarte Punkte endliche Sprunggrößen aufweisen, auch für die Sprunggrößen $\mathfrak{w}_n(\bar{x})$ *von* $W_n(\bar{x})$:

$$(V_4) \qquad \lim_{n=\infty} \sqrt{n}^k \, \mathfrak{w}_n(\bar{x}) = \frac{e^{-\sum_\iota \frac{\xi^{(\iota)2}}{2H^{(\iota)}}}}{\sqrt{(2\pi)^k H_n^{(1)} \dots H_n^{(k)}}}.$$

Dabei gehen die Koordinatenrichtungen der $\xi^{(\iota)}$ *und die Werte* $H_n^{(\iota)}$ *durch Hauptachsen-Transformation aus der Matrix* $h_n^{(\iota,\lambda)}$ *hervor, deren Komponenten nach* (7″) *durch die Streuungen* $s_\varkappa^{(\iota,\lambda)}$ *der gegebenen Verteilungen bestimmt sind.*

Man kann die Ausdrücke rechts in (III_4), (IV_4) und (V_4) auch in den ursprünglichen Koordinaten $x^{(\iota)}$ schreiben, wenn man die Koeffizienten der Matrix bestimmt, deren Hauptachsenrichtungen mit denen der $h_n^{(\iota,\lambda)}$ übereinstimmen, während die Hauptachsenlängen die halben reziproken Werte haben. (Ein Beispiel hierzu s. § 7, 5.)

5. Geometrische Deutung der Sätze I bis IV. Denken wir uns in einem n-dimensionalen Koordinatensystem $x_1, x_2, \dots, x_n$ eine skalare Funktion des Ortes p_n gegeben, die dadurch gekennzeichnet ist, daß sie sich als ein *Produkt von n Funktionen der einzelnen Koordinaten* $f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \dots f_n(x_n)$ darstellt. Die $f_\varkappa(x_\varkappa)$ sollen den Voraussetzungen des § 1 genügen, also im wesentlichen die Eigenschaft besitzen, daß sie an einer regulären Stelle $x_\varkappa = a_\varkappa$ den Wert 1 und sonst überall kleinere Beträge annehmen. Verfolgt man dann *vom Punkte* $\bar{x} = \bar{a}$ *aus in der Richtung „unter* 45°“ (nämlich in der durch $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ gegebenen Richtung) den Wert von p_n, so findet man nach Satz I, daß dieser Wert als Funktion des in einem bestimmten Maßstab $u = \frac{r_n}{\sqrt{n}} z$ gemessenen Abstandes z von $\bar{a}$, sich um so mehr dem e^{-u^2} nähert, je größer die Zahl n ist — gleichgültig, wie die einzelnen Funktionen $f_\varkappa$ aussehen. Haben sämtliche $f_\varkappa$ an der Stelle $x_\varkappa$ die gleiche zweite Ableitung, so bleibt der Maßstabfaktor von n unabhängig. Er wird insbesondere gleich 1, wenn die $f_\varkappa$ so normiert werden, daß die zweiten Ableitungen gleich -2 sind. Satz II ergänzt die Aussage nur durch eine Hinzufügung über das Verhalten von $p_n(u)$ im Unendlichen.

Es ist klar, daß man statt der Richtung „unter 45°“ *auch eine beliebige andere* wählen kann, die etwa durch $x_1 : x_2 : \dots : x_n = h_1^{(n)} : h_2^{(n)} : \dots : h_n^{(n)}$ gegeben wird, wobei sämtliche $h_\varkappa^{(n)}$ in endlichen Grenzen liegen. Dies bedeutet ja nur eine unwesentliche Transformation der unabhängig Veränderlichen der $f_\varkappa$ und hätte analog dem Korollar III_3 und IV_3 dieses Paragraphen als Korollar in § 2 formuliert werden können, wenn es sich nicht eben von selbst verstünde.

Nehmen wir nun an, es seien an Stelle der $f_\varkappa(x_\varkappa)$ Funktionen $v_\varkappa(x_\varkappa)$ r Koordinaten gegeben, die den Voraussetzungen des § 3 genügen, d. i. im sentlichen: sie sind Ableitungen von „Verteilungen", die endliche Momente, nigstens bis zur dritten Ordnung, besitzen, und von beschränkter Schwanng. Durch die Momente erster Ordnung, oder die Mittelwerte $a_\varkappa$, wird eder ein Punkt $\bar{a}$ des n-dimensionalen Raumes bestimmt. Durch diesen nkt, und dann in beliebigen Abständen z von diesem Punkt, legen wir enen *„unter* 45^0" (nämlich solche, die durch $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x$ konst. bestimmt werden), bilden auf jeder Ebene das *Integral des Produktes der Funktionen* $v_\varkappa(x_\varkappa)$, nämlich die Größe

$$w_n = \int \ldots \int\int v_1(x_1)\, v_2(x_2) \ldots v_n(x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}$$

d betrachten dieses w_n als Funktion des Abstandes $z = \frac{x}{\sqrt{n}}$ vom Punkte $\bar{a}$. nser Satz IV besagt, daß diese Funktion, bis auf einen veränderlichen ßstabfaktor $r_n : \sqrt{n}$, sich den Werten von $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}$ $\left(\text{mit } u = \frac{\sqrt{n}}{r_n} z\right)$ nähert, bald n hinreichend wächst. Der Maßstabfaktor bleibt wieder von n abhängig, sobald alle Verteilungen auf $a_\varkappa$ bezogen gleich große Momente eiter Ordnung (gleiche Streuungen) haben und wird insbesondere gleich 1, nn alle Streuungen gleich $^1/_2$ sind. Satz III kann aufgefaßt werden eine Ergänzung zu IV für den Fall, daß die $v_\varkappa(x)$ nicht beschränkt, er integrabel sind und daß demgemäß nicht über die oben betrachtete nktion, sondern nur über ihr unbestimmtes Integral etwas ausgesagt rden kann.

Mit dem Korollar III_3 und IV_3 dieses Paragraphen ist die Ausdehnung r Betrachtung auf *beliebig geneigte Ebenen*, an Stelle der „unter 45^0" henden, gegeben. Zusammenfassend können wir sagen:

Schreitet man im n-dimensionalen Raum von dem (in beiden Fällen rschieden definierten) *ausgezeichneten Punkte* $\bar{a}$ *längs irgend einer Geraden fort, so stellt sich einerseits das Produkt* p_n *der Funktionen* $f_\varkappa(x_\varkappa)$, mlich $p_n(u) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \ldots f_n(x_n)$ *als Funktion des Abstandes von* $\bar{a}$ *rachtet, andererseits das Integralprodukt* w_n *der Funktionen* $v_\varkappa$, *erstreckt er die zu G senkrechten Ebenen*:

$$w_n(u) = \int \ldots \int\int v_1(x_1)\, v_2(x_2) \ldots v_n(x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1},$$

Funktion des Abstandes der Ebenen von $\bar{a}$ *betrachtet, im Limes für* $= \infty$ *als* e^{-u^2} *bzw.* $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}$ *dar.*

Die genauen Voraussetzungen, Formulierungen usw. dieser Sätze sind den vorangehenden Ausführungen enthalten.

Eine einfache und lehrreiche Deutung gestatten auch die in de Korollaren § 2, 4 und § 6, 4 gegebenen Erweiterungen für die Fälle mi *mehreren unabhängig Veränderlichen.* Wir müssen jetzt einen Raum vo kn Dimensionen betrachten, in dem die Komponenten des Vektors $\bar{x}$ durc $x_\varkappa^{(\iota)}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n;\ \iota = 1, 2, \ldots, k)$ dargestellt werden. Anstelle de Geraden „unter 45°" im Falle des *einfachen Produktes* tritt jetzt de durch $k(n-1)$ Gleichungen der Form $x_1^{(\iota)} = x_2^{(\iota)} = \ldots = x_n^{(\iota)} (\iota = 1, 2, \ldots, k$ herausgehobene k-fach ausgedehnte Unterraum. In diesem stellt sich da Produkt p_n nach geeigneter Regulierung der Maßstäbe und nach ent sprechender Drehung des Koordinatenkreuzes (Transformation der quadra tischen Form in § 2, 4 auf eine Summe von Quadraten) im Limes für $n = c$ als ein Produkt von k Funktionen $e^{-H^{(\iota)} \cdot u^{(\iota)2}}$ dar. Analog sind im Fal der *Integralprodukte* die Integrale der Produkte über $k(n-1$ dimensionale Räume zu erstrecken, die durch k Gleichungen der For $x_1^{(\iota)} + x_2^{(\iota)} + \ldots + x_n^{(\iota)} = x^{(\iota)} =$ konst. definiert werden und als Funktion de k Variablen $x^{(\iota)}$ zu betrachten. Hierauf ergeben sich die $w_n(\bar{u})$, wied nach Regulierung des Maßstabes und Transformation auf Hauptachsen i Limes als Produkte, wie es Gl. (IV_4) oben zeigt.

Man sieht, daß sich hier neue Fragen anknüpfen lassen, die bei de einfachen Produkten trivial sind, bei Integralprodukten aber zu neue schwierigen Problemen führen; nämlich die Fragen, was bei Hinzutrete *beliebiger weiterer linearer Beziehungen* zwischen den kn Variablen en steht. So hat beispielsweise Markoff für $k = 2$ mit den neu hinzutretende Gleichungen $x_\varkappa^{(2)} = x_{\varkappa+1}^{(1)} (\varkappa = 1, 2, \ldots, n-1)$ das Integralprodukt „verke teter" Größen untersucht und unter gewissen Voraussetzungen wieder die Ko vergenz gegen das Exponentialgesetz gefunden[9]). In der vorliegende Arbeit bleiben diese Untersuchungen, die, allgemein gefaßt, auf höhe Produktbildungen führen, unberücksichtigt.

II. Teil. Anwendungen in der Wahrscheinlichkeits-rechnung.

§ 7.

Die Binomialzahlen, der Bernoullische und Poissonsche Fall und sein Verallgemeinerung.

1. Die Binomialzahlen. Der einfachste Fall einer Anwendung d Sätze über das Integralprodukt liegt vor bei Betrachtung der Binomialzahle $\binom{n}{x}$ als Funktion von x, im Limes für $n = \infty$. In der Wahrscheinlic

[9]) Vgl. A. A. Markoff, Wahrscheinlichkeits-Rechnung, Dtsch. v. H. Liebman Leipzig 1912, Anhang II und III.

itsrechnung tritt diese Aufgabe z. B. beim „Kopf- und Adlerspiel" auf, nn man voraussetzt, daß die Wahrscheinlichkeit, beim Werfen einer inze die eine oder andere Seite zu treffen, gleich $\frac{1}{2}$ ist. Man fragt ch der Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{w}_n(u)$, bei n Würfen eine bestimmte Anzahl von Kopfwürfen zu erreichen, wo x und u in einer noch festzusetzenden eziehung stehen.

Setzen wir

$$V_1(x) = V_2(x) = V_3(x) = \ldots = 0 \text{ für } x < 0,$$
$$= \tfrac{1}{2} \quad " \quad 0 \leqq x < 1,$$
$$= 1 \quad " \quad 1 \leqq x,$$

entsprechen diese Verteilungen den allgemeinen Bedingungen des § 3 d den besonderen Annahmen der Behauptung V. Denken wir uns der dlerseite den Wert null, der Kopfseite den Wert 1 zugeschrieben, so ellt $V_x(x)$ die Wahrscheinlichkeit dar, beim x-ten Versuch „höchstens x treffen". Mittelwert und Streuung ergeben sich nach (4) in § 3, da V_x ur die zwei Wachstumstellen 0 und 1 mit den Sprüngen $\mathfrak{v}_x(0) = \mathfrak{v}_x(1) = \frac{1}{2}$ sitzt, zu

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 0 \cdot \tfrac{1}{2} + 1 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2},$$
$$s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = \ldots = (-\tfrac{1}{2})^2 \cdot \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}.$$

Daraus folgt nach (7′) und (7) in § 3:

$$b_n = \frac{n}{2}, \quad r_n^2 = \frac{n}{2}; \quad x = \sqrt{\frac{n}{2}}\, u + \frac{n}{2}, \quad u = \frac{x - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{2}}}.$$

Das n-te Integralprodukt $W_n(u)$ der Verteilungen (1) liefert da- r die Wahrscheinlichkeit, bei n Würfen „höchstens die Summe x $\sqrt{\frac{n}{2}}\, u + \frac{n}{2}$ zu treffen". Man erkennt das unmittelbar an der Gl. (3) s § 3, die hier als Definition des Integralproduktes zu gelten hat. Die röße $\mathfrak{w}_n(u)$ selbst bedeutet die Wahrscheinlichkeit, gerade die Summe x n Würfen zu erreichen. Andererseits kann man diese Wahrscheinlich- eiten in bekannter Weise durch die Binomialzahlen n-ter Ordnung bzw. urch deren von null bis zu dem angegebenen Wert von x erstreckte mme ausdrücken. Gl. (V) und (III) des § 3 liefern daher die folgenden eiden Sätze:

a) $$\mathfrak{w}(u) = \lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{n}{2}}\, \mathfrak{w}_n(u) = \lim_{n=\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^{n+\frac{1}{2}}} \left(\sqrt{\frac{n}{2}}\, u + \frac{n}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \equiv \varphi(u);$$

b) $$W(u) = \lim_{n=\infty} W_n(u) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{x=0}^{\sqrt{\frac{n}{2}}\, u + \frac{n}{2}} \binom{n}{x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int^{u} e^{-x^2}\, dx \equiv \Phi(u).$$

In Worten besagt (2a): *Die Binomialzahlen* $\binom{n}{x}$ *bei festen* n *al Funktion von* $x - \frac{n}{2}$, *in gehörigem, mit* n *veränderlichem, Abszissen- und Ordinatenmaßstab aufgetragen, ergeben in ihren Endpunkten im Limes für* $n = \infty$ *die Gaußsche Linie* $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}$, *wobei der Zusammenhang zwischen* u *und* $x - \frac{n}{2}$ *durch* (1″) *gegeben ist.*

In der üblichen Gestalt von *Näherungsformeln für große* n lauten (2a) und (2b):

$$(2') \quad \binom{n}{x} \sim \frac{2^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}} \varphi\left(\sqrt{\frac{2}{n}} x - \sqrt{\frac{n}{2}}\right): \quad \sum_{z=0}^{x} \binom{n}{z} \sim 2^n \Phi\left(\sqrt{\frac{2}{n}} x - \sqrt{\frac{n}{2}}\right).$$

Die genaue Bedeutung von (2′) kann natürlich nur aus (2a) und (2b) entnommen werden.

Es ist bekannt, wie man (2) und (2′) durch direkte Rechnung unter Heranziehung des *Stirling*schen asymptotischen Ausdruckes für die Fakultäten ableitet. Hierzu mag bemerkt werden, daß die *Stirlingsche Formel sich als ein sehr spezieller Fall unseres Satzes* II über den Grenzwert eines Produktes von Funktionen darstellt. Denn man hat mit der Substitution $z - n = n x$:

$$(3) \qquad n! = \int_0 z^n e^{-z} dz = n^{n+1} e^{-n} \int_{-1} (1+x)^n e^{-n x} dx.$$

Setzt man $f_1 = f_2 = \ldots f = (1+x) e^{-x}$ für $x \geqq -1$
$= 0$ „ $x < -1$,

so genügen diese $f_\varkappa$ sämtlichen Voraussetzungen des § 1 und insbesondere ist $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, also $r_n^2 = \frac{n}{2}$. Demnach liefert (II) auf $a = -\infty$, $b = \infty$ angewendet:

$$(3') \quad \lim_{n=\infty} \int f^n \left(\sqrt{\frac{2}{n}} u\right) du = \lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{n}{2}} \int f^n(x) dx = \lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{n}{2}} n!\, n^{-(n+1)} e^n =$$

also die Stirlingsche Formel:

$$(3'') \qquad n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

2. Der Bernoullische Fall. Aus einer Urne, die schwarze und weiße Kugeln (oder die Zahlen Null und Eins) enthält, wird mit der Wahrscheinlichkeit $p > 0$ eine schwarze, und mit der Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p > 0$ eine weiße Kugel gezogen. Die Verteilungen

$$(4) \qquad \begin{aligned} V_1(x) = V_2(x) = V_3(x) = \ldots &= 0 \text{ für } x < 0, \\ &= p \;\; „ \;\; 0 \leqq x < 1, \\ &= 1 \;\; „ \;\; 1 \leqq x \end{aligned}$$

nügen den allgemeinen Voraussetzungen des § 3 und den besonderen der hauptung V. Man findet:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 0 \cdot p + 1 \cdot q = q, \qquad b_n = nq,$$
$$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = \varepsilon_3^2 = \ldots = q^2 \cdot p + p^2 \cdot q = pq, \qquad r_n^2 = 2npq,$$
$$x = \sqrt{2npq}\,u + nq, \qquad u = \frac{x - nq}{\sqrt{2npq}}.$$

Das n-te Integralprodukt $W_n(u)$ der Verteilungen (4) gibt also die ahrscheinlichkeit, in n Zügen „höchstens die Summe $x = \sqrt{2npq}\,u + nq$ treffen", $\mathfrak{w}_n(u)$ die Wahrscheinlichkeit, gerade die Summe x zu gewinnen. t Rücksicht auf die direkte Darstellbarkeit dieser Wahrscheinlichkeiten rch den binomischen Lehrsatz liefern unsere Gl. (III) und (V):

$$\mathfrak{w}(u) = \lim_{n=\infty} \sqrt{2npq}\,\mathfrak{w}_n(u)$$

$$= \lim_{n=\infty} \sqrt{2npq}\,p^{np - \sqrt{2npq}}\,q^{nq + \sqrt{2npq}} \binom{n}{\sqrt{2npq}\,u + nq} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \equiv \varphi(u);$$

$$W(u) = \lim_{n=\infty} W_n(u) = \lim_{n=\infty} \sum_{x=0}^{\sqrt{2npq}\,u + nq} p^{n-x} q^x \binom{n}{x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-x^2} dx \equiv \Phi(u).$$

Dies ist der exakte Ausdruck der von *Laplace* gefundenen Lösung s Bernoullischen Problems. Als *Näherungsformeln für große n* lauten a) und (5b):

a′) $$\binom{n}{x} p^{n-x} q^x \sim \frac{1}{\sqrt{2npq}} \varphi\left(\frac{x - nq}{\sqrt{2npq}}\right),$$

b′) $$\sum_{z=0}^{x} \binom{n}{z} p^{n-z} q^z \sim \Phi\left(\frac{x - nq}{\sqrt{2npq}}\right).$$

Auch diese Gleichungen lassen sich, wie bekannt, unschwer mit Hilfe r Stirlingschen Formel ableiten. Noch einfacher gewinnt man sie (und türlich auch die spezielleren (2a) und (2b)) durch folgende Überlegung. us der Definition

) $$\mathfrak{w}_n(u) = \binom{n}{x} p^{n-x} q^x, \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots),$$

der u und x durch die Beziehung $x = r_n u + b_n$ verknüpft sind, leitet an durch Übergang von x auf $x + 1$ ab:

′) $$r_n \frac{\mathfrak{w}_n\left(u + \frac{1}{r_n}\right) - \mathfrak{w}_n(u)}{\frac{1}{r_n}} = -2u r_n \mathfrak{w}_n(u) \frac{1 + \frac{p}{r_n u}}{1 + \frac{2pu}{r_n} + \frac{2p}{r_n^2}}.$$

Der Bruch rechts geht mit wachsendem n gegen 1, der Bruch links hert sich dem Differentialquotienten der Funktion $\mathfrak{w}(u)$. Man hat also

im Limes für $n = \infty$: $\mathfrak{w}'(u) = -2u\,\mathfrak{w}(u)$, woraus sofort (5a) folgt. – Für uns sind (5a) und (5b) nur ganz spezielle Beispiele für die Behauptung V des § 3.

3. Der Poissonsche Fall. Poisson hat die Bernoullische Aufgabe dahin erweitert, daß die Wahrscheinlichkeiten p, q eines schwarzen bzw. weißen Zuges nicht konstant, sondern *von Zug zu Zug wechselnd* angenommen werden. Wir haben also die Verteilungen:

$$\begin{aligned} V_x &= 0 \text{ für } && x < 0, \\ &= p_x \;,, && 0 \leqq x < 1, \\ &= 1 \;,, && 1 \leqq x; \end{aligned} \qquad (x = 1, 2, 3, \ldots) \tag{7}$$

Hierbei wird angenommen, daß die p_x und q_x von null und eins verschieden sind, womit wieder allen Voraussetzungen des § 3 und auch der speziellen Annahmen des Satzes V Genüge getan ist. Man findet

$$\begin{aligned} &a_x = 0 \cdot p_x + 1 \cdot q_x = q_x, && b_n = \sum_{x=1}^{n} q_x, \\ &s_x^2 = q_x^2 \cdot p_x + p_x^2 \cdot q_x = p_x q_x, && r_n^2 = 2 \sum_{x=1}^{n} p_x q_x, \\ &x = \sqrt{2 \Sigma p_x q_x}\, u + \Sigma q_x, && u = \frac{x - \Sigma q_x}{\sqrt{2 \Sigma p_x q_x}}. \end{aligned} \tag{7'}$$

Erteilen wir wieder der schwarzen Kugel den Wert null, der weißen den Wert 1, so gibt $W_n(u)$, für die Verteilungen (7) berechnet, die Wahrscheinlichkeit, „höchstens die Summe $x = \sqrt{2 \Sigma p_x q_x}\, u + \Sigma q_x$ zu treffen“. $\mathfrak{w}_n(u)$ die Wahrscheinlichkeit, gerade diese Summe x zu ziehen. Eine direkte Darstellung von $\mathfrak{w}_n(u)$ in geschlossenen Ausdrücken ist hier nicht mehr möglich. Die Poissonschen Resultate sind in den beiden folgenden aus unseren Gl. (III) und (V) entspringenden Gleichungen präzisiert:

$$\mathfrak{w}(u) = \lim_{u = \infty} \sqrt{2 \Sigma p_x q_x}\, \mathfrak{w}_n(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \equiv \varphi(u), \tag{8a}$$

$$W(u) = \lim_{n = \infty} W_n(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-x^2} dx \equiv \Phi(u); \tag{8b}$$

die als *Näherungsformeln für große n* lauten:

$$\mathfrak{w}_n(u) = \mathfrak{w}_n'(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2 \Sigma p_x q_x}} \varphi\left(\frac{x - \Sigma q_x}{\sqrt{2 \Sigma p_x q_x}} \right), \tag{8a'}$$

$$W_n(u) = W_n'(x) \sim \Phi\left(\frac{x - \Sigma q_x}{\sqrt{2 \Sigma p_x q_x}} \right), \tag{8b'}$$

wenn $\mathfrak{w}_n'(x)$ bzw. $W_n'(x)$ die Wahrscheinlichkeiten bezeichnen, in n Züge

nau x bzw. höchstens x als Summe zu ziehen. Alle Σ sind von $\varkappa = 1$ s n zu nehmen.

Die von Poisson herrührende Ableitung, die mit geringen Varianten ch in den heutigen Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung wiedergeben wird, benutzt die schon Laplace bekannte Zurückführung des tegralproduktes auf einfache Produkte einschließlich der Umkehrformel, Sinne unserer allgemeinen Überlegungen in § 3, 5[10]). Die in unseren Beuptungen I und II enthaltenen allgemeinen Resultate werden dann durch ıständliche Abschätzung des in Gl. (17′) des § 3 auftretenden Integrals, seiner besondern, dem vorliegenden Fall entsprechenden Gestalt, ersetzt.

4. Allgemeiner eindimensionaler Fall. Eine weitere Verallmeinerung des Bernoullischen und Poissonschen Problems entsteht, nn die einzelnen Urnen *nicht nur schwarze und weiße*, oder mit Null d Eins bezeichnete, Kugeln, *sondern auch* 2, 3, ..., *m-wertige* enthalten, d nach der Wahrscheinlichkeit gefragt wird, in n Zügen die Summe x er „höchstens die Summe x" zu ziehen. So wird z. B. beim gewöhnhen Zahlenlotto aus einer Urne, die die Zahlen 1, 2, 3, ... bis 90 enthält, zogen und man kann nach der Wahrscheinlichkeit fragen, in n Einzelehungen einen bestimmten Durchschnitt $x : n$ zu erhalten. Hier ist jede rteilung durch m nicht-negative Zahlen gegeben, deren Summe $\leqq 1$, mlich durch die „Einzelwahrscheinlichkeiten" $\mathfrak{v}_\varkappa(0), \mathfrak{v}_\varkappa(1), \ldots, \mathfrak{v}_\varkappa(m-1)$, denen $\mathfrak{v}_\varkappa(m) = 1 - \mathfrak{v}_\varkappa(0) - \mathfrak{v}_\varkappa(1) - \ldots - \mathfrak{v}_\varkappa(m-1)$ hinzutritt. Jedes (x) stellt die Wahrscheinlichkeit dar, beim $\varkappa$-ten Zug die Zahl x zu hen. Unsere $V_\varkappa(x)$ sind definiert durch:

$$\begin{aligned}
V_\varkappa(x) &= 0, && x < 0,\\
&= \mathfrak{v}_\varkappa(0), && 0 \leqq x < 1,\\
&= \mathfrak{v}_\varkappa(0) + \mathfrak{v}_\varkappa(1), && 1 \leqq x < 2,\\
&= \mathfrak{v}_\varkappa(0) + \mathfrak{v}_\varkappa(1) + \mathfrak{v}_\varkappa(2), && 2 \leqq x < 3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&= 1, && m \leqq x.
\end{aligned}$$

[10]) Eine Ausnahme bildet H. Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivlehre, Leipzig 1906, S. 191 ff., der den Satz darauf stützt, daß in der Entwicklung $W_n(x)$ nach den Ableitungen von $\Phi(x)$ die Koeffizienten der späteren Glieder wachsendem n gegenüber dem ersten zurücktreten. Diese Betrachtung ließe sich t ohne Schwierigkeit zu einem *Beweis* des Poissonschen Satzes ergänzen, indem noch zeigt, daß auch die *Summe* der Glieder mit $n = \infty$ gegen null geht. Aber die gemeinheit der in den §§ 3–5 gegebenen Beweise läßt sich auf diesem Wege nicht ichen, weil die Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen nach der Exponentiale an engere Voraussetzungen geknüpft ist (beschränkte Schwankung und Verwinden im Unendlichen stärker als $x^{-3} e^{-\frac{x^2}{2}}$). Vgl. R. v. Mises, Jahresber. d. tsch. Math.-Ver. 1912, S. 9.

Im Falle des Zahlenlottos ist nach der üblichen Annahme jede $\mathfrak{v}_\varkappa(1) = \mathfrak{v}_\varkappa(2) = \ldots = \mathfrak{v}_\varkappa(90) = \frac{1}{90}$.

Man findet zu (9):

$$(9') \qquad a_\varkappa = \sum_{x=0}^{m} x\,\mathfrak{v}_\varkappa(x); \quad s_\varkappa^2 = \sum_{x=0}^{m} (x - a_\varkappa)^2\,\mathfrak{v}_\varkappa(x) = \sum_{x=0}^{m} x^2\,\mathfrak{v}_\varkappa(x) - a_\varkappa^2;$$

$$b_n = \sum_{\varkappa=1}^{n}\sum_{x=0}^{m} x\,\mathfrak{v}_\varkappa(x); \quad r_n^2 = 2\sum_{\varkappa=1}^{n}\left[\sum_{x=0}^{m} x^2\,\mathfrak{v}_\varkappa(x) - a_\varkappa^2\right],$$

wodurch der Zusammenhang $x = r_n u + b_n$ zwischen dem Argument u de Gaußschen Funktion und der Summe x der Ziehungsergebnisse fest gelegt ist.

In unserem Beispiel des Zahlenlottos ist $a_\varkappa = 45{,}5$, $s_\varkappa^2 = \frac{1}{90}[1^2 + 2^2 + \ldots + 90^2] - 45{,}5^2 = 674{,}9167$; daher $b_n = 45{,}5\,n$, $r_n^2 = 1349{,}83\,n$. Mithin ist die Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{w}_n(u)$ in n Einzel-Ziehungen (vor denen jedesmal das zuletzt gezogene Los zurückgelegt wird) die Summe x oder den Durchschnitt $\frac{x}{n}$ zu ziehen, asymptotisch für große n:

$$\mathfrak{w}_n(u) = \mathfrak{w}_n'(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{36{,}74\sqrt{n}}\,e^{-\left(\frac{x - 45.5\,n}{36.74\sqrt{n}}\right)^2}$$

und exakt, wenn α für den Zahlenwert 1349,83 ... geschrieben wird:

$$(9'') \qquad \lim_{n=\infty} \sqrt{2\,n\,\alpha}\,\mathfrak{w}_n(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-u^2}.$$

Die einzige Bedingung, der die $\mathfrak{v}_\varkappa(x)$ allgemein unterworfen werden müssen, damit Satz V gilt, ist die, daß für jedes $\varkappa$ mindestens ein Paar aufeinanderfolgender Koeffizienten von null verschieden sein muß. Denn die Beschränktheit der ersten drei Momente, die nach den Korollaren V_1 und V_2 außerdem noch allein zu fordern wäre, ist sichergestellt, wenn die Zahl k als endliche Größe unabhängig von $\varkappa$ gegeben ist. Da man nun die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{w}_n(u)$ für das Treffen der Summe $x = r_n u + b_n$ in bekannter Weise durch Multiplikation der Polynome $\sum_x \mathfrak{v}_\varkappa(x)\,t^x$ ($\varkappa = 1, 2, 3, \ldots,$ findet, können wir folgenden allgemeinen Satz über die Koeffizienten eines Produktes von Polynomen aussprechen:

Besitzt jedes Polynom $P_\varkappa = \sum_x \mathfrak{v}_\varkappa(x)\,t^x$ *der unendlichen Folge* $P_1, P_2, P_3, \ldots$ *von Polynomen höchstens* m*-ter Ordnung lauter nicht-negative Koeffizienten, die Koeffizientensumme* 1 *und mindestens ein Paar unmittelbar aufeinanderfolgender (auch im Limes) nicht verschwindender Koeffizienten, so liefern die Koeffizienten* $k_n(x)$ *der Entwicklung des Produkt*

$P_2 P_3 \dots P_n = \sum_x k_n(x) t^x$, *als Funktion des Index* x, *bei gehöriger*

m n *abhängiger*) *Wahl des Anfangspunktes, des Abszissen- und Ordi-tenmaßstabes aufgetragen, im Limes für* $n = \infty$ *die Gaußsche Linie* e^{-u^2}; *es ist*

$$\lim_{n=\infty} r_n k_n(r_n u + b_n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \qquad (10)$$

t den durch (9′) *bestimmten Werten von* r_n *und* b_n. Der Grenzübergang so zu vollziehen, daß u konstant gehalten wird oder zumindest für $n = \infty$ em festen Wert zustrebt.

Dieser, wie es scheint, neue Satz zeigt, daß die oben angeführte be-nnte Eigenschaft der Binomialzahlen nicht etwa für diese kennzeichnend . sondern der Koeffizientenreihe eines *jeden Polynoms* zukommt, das im sentlichen als *Produkt sehr vieler Polynome mit positiven Koeffizienten* steht.

Daß das Vorhandensein eines Paares aufeinanderfolgender Koeffizienten ht nur hinreichend, sondern (wenigstens für „fast alle" Polynome) auch wendig ist, sieht man leicht ein. Denn wenn z. B. die Koeffizienten er ungeraden Indizes ganz ausfielen, könnten gar keine ungeraden Summen stehen; wenn nun die ungeraden Indizes zwar vorkämen, aber nur in nigen Faktoren, so müßten in der Entwicklung des Produktes die un-aden Glieder verhältnismäßig viel kleinere Koeffizienten haben als die achbarten geraden, was offenbar dem Resultat (10) widerspricht.

In unserem Satz V von § 3 ist nichts enthalten, was eine Beschränkung Polynome von endlicher Ordnung notwendig machen würde, wenn nur Voraussetzungen des § 3 erfüllt sind. Machen wir von den Korollaren und V_2 in § 6 Gebrauch, so können wir sagen:

Die in Gleichung (10) *zum Ausdruck kommende Eigenschaft der effizienten besteht auch für das Produkt von Potenzreihen, die nach itiven und eventuell auch negativen Potenzen fortschreiten, sobald noch ende Bedingungen erfüllt sind: es muß*

$$(9') \quad \left|\sum_x x\,\mathfrak{v}_x(x)\right| < A, \quad \left|\sum_x x^2\,\mathfrak{v}_x(x)\right| < B, \quad \left|\sum_x x^3\,\mathfrak{v}_x(x)\right| < C,$$

h. die Folge der ersten, zweiten und dritten Momente der gegebenen effizienten beschränkt sein.

Die beiden vorstehenden Sätze sind nur eine andere Form der ichung (V) unter Berücksichtigung der Korollare V_1 und V_2. Es bringt sich, Gleichung (III), die naturgemäß in analoger Weise als Satz r die Koeffizienten einer Potenzreihe gedeutet werden kann, noch be-ders auszusprechen.

5. Mehrdimensionaler Fall. Die bisher abgeleiteten Sätze, namentlich die beiden letzten allgemeinen Behauptungen, lassen sich vermög unseres Korollars V_4 in § 6 auch auf Fälle mehrdimensionaler Verteilunge ausdehnen. Um diese Anwendung zu erklären und zugleich den in § 6, angedeuteten Rechnungsgang zu erläutern, wollen wir ein konkretes Be spiel aus dem Rahmen der klassischen Aufgaben der Wahrscheinlichkeit rechnung voranstellen.

Beim „gewöhnlichen Zahlenlotto" werden aus einer Urne, die z Anfang jede der Zahlen 1 bis 90 einmal enthält, hintereinander 5 Zahle gezogen. Dabei wird angenommen, daß die Wahrscheinlichkeit eine b stimmte Zahl zu ziehen, für alle in der Urne enthaltenen Zahlen gleic groß ist. Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Ziehung eine bestimmte Fol von 5 Zahlen $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(5)}$ zu erhalten, wird durch eine 5-dimensiona Verteilung dargestellt, wobei

$$(11) \qquad \mathfrak{v}_\varkappa(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(5)}) = \tfrac{1}{90}\cdot\tfrac{1}{89}\cdot\tfrac{1}{88}\cdot\tfrac{1}{87}\cdot\tfrac{1}{86} = p$$

$$\text{für } x^{(1)} \neq x^{(2)} \neq \ldots \neq x^{(5)}; \quad x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(5)} = 1, 2, 3, \ldots, 90,$$

während alle übrigen $\mathfrak{v}_\varkappa$ null sind. Diese, von $\varkappa$ unabhängige, Verteilur genügt allen Voraussetzungen der Behauptung V. Man erhält für de 5-dimensionalen Vektor des Mittelwertes $\bar{a}_\varkappa$ und die 5-dimensionale Matri der Streuung $\overline{\overline{s}}_\varkappa$:

$$a_\varkappa^{(\iota)} = \tfrac{1}{90}[1 + 2 + \ldots + 90] = 45{,}5, \qquad \iota = 1, 2, \ldots,$$

$$s_\varkappa^{(\iota,\iota)} = \tfrac{1}{90}[1^2 + 2^2 + \ldots + 90^2] - 45{,}5^2 = \frac{89\cdot 91}{12} = \alpha, \qquad \iota = 1, 2, \ldots,$$

(11′)

$$s_\varkappa^{(\iota,\lambda)} = \frac{1}{90\cdot 89}[1\cdot 2 + 1\cdot 3 + \ldots + 1\cdot 90 + 2\cdot 1 + 2\cdot 3 + \ldots + 2\cdot 90 + \ldots] - 4$$

$$= -\tfrac{91}{12} = \beta \qquad \iota, \lambda = 1, 2, \ldots, 5, \quad \iota \neq$$

Da die $a_\varkappa^{(\iota)}$ und $s_\varkappa^{(\iota,\lambda)}$ für alle $\varkappa$ gleich sind, stimmen die letzteren mit de in (7″) des § 6 definierten $h_n^{(\iota,\lambda)}$ überein, während die ersteren $b_n^{(\iota)} = 45{,}5$ ergeben. Die aus den $h_n^{(\iota,\lambda)}$ gebildete quadratische Form

$$(11'') \qquad \alpha(z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_5^2) + 2\beta(z_1 z_2 + z_1 z_3 + \ldots + z_4 z_5)$$

hat zur einen Hauptachse mit dem Wurzelwert $\lambda_1 = \alpha + 4\beta$ die Gera $z_1 = z_2 = \ldots = z_5$; die anderen 4 Hauptachsen entsprechen dem Wurze wert $\lambda_2 = \alpha - \beta$, können also in der Ebene $z_1 + z_2 + \ldots + z_5 = 0$ b liebig (orthogonal zueinander) angenommen werden. Die quadratisch Form mit derselben Orientierung und reziproken Wurzelwerten ist

$$\alpha'(z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_5^2) + 2\beta'(z_1 z_2 + z_1 z_3 + \ldots + z_4 z_5),$$

$$(11''') \quad \text{mit } \alpha' = \frac{\alpha + 3\beta}{(\alpha-\beta)(\alpha+4\beta)} = \frac{2\cdot 86}{15\cdot 85\cdot 91}, \quad \beta' = -\frac{\beta}{(\alpha-\beta)(\alpha+4\beta)} = \frac{2}{15\cdot 85}$$

zt man, wie in § 6, 4 $\bar{x} = \sqrt{n}\,\bar{z} + \bar{b}_n$, so ergibt die Anwendung von z V_4 für die Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{w}_n(z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(5)})$, in n Ziehungen rch die an erster Stelle gezogenen Lose die Summe $x^{(1)} = \sqrt{n}z^{(1)} + 45{,}5\,n$ w. den Durchschnitt $\frac{x^{(1)}}{n}\Big)$, durch die an zweiter Stelle gezogenen die mme $x^{(2)} = \sqrt{n}\,z^{(2)} + 45{,}5\,n$ usw. zu erhalten:

$$\text{2)} \qquad \lim_{n=\infty} \sqrt{n}^5\, \mathfrak{w}_n(z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(5)})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^5\, \lambda_1\, \lambda_2^4}}\, e^{-\frac{\alpha'}{2}\left(z^{(1)2} + z^{(2)2} + \ldots + z^{(5)2}\right) - \beta'\left(z^{(1)}z^{(2)} + \ldots + z^{(4)}z^{(5)}\right)}.$$

ist übersichtlicher, hier an Stelle von $\bar{z}$ als neue Variable $\bar{u} = \bar{z} : \sqrt{2\,\alpha}$ zuführen, so daß dann $\bar{x} = \sqrt{2\,n\,\alpha}\,\bar{u} + \bar{b}_n$ wird, weil man dadurch einen quemen Vergleich mit dem oben § 7, 4 betrachteten eindimensionalen ll gewinnt. Setzen wir teilweise gleich die Zahlenwerte ein, so wird:

$$\text{2')} \qquad \lim_{n=\infty} \sqrt{2\,n\,\alpha}^5\, \mathfrak{w}_n(u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(5)})$$

$$= \frac{1{,}0006}{\sqrt{\pi}^5}\, e^{-1{,}00052\left(u^{(1)2} + \ldots + u^{(5)2}\right) - 0{,}0232\left(u^{(1)}u^{(2)} + \ldots + u^{(4)}u^{(5)}\right)}$$

n sieht, daß der Koeffizient der Quadratsumme im Exponenten sich nig von 1, der der übrigen Glieder wenig von null, der ganze Ausdruck r unbedeutend von der fünften Potenz des oben gefundenen (9″) unter- eidet. Der Unterschied rührt ja nur von dem Nicht-Zurücklegen der se innerhalb einer Ziehung von 5 Nummern her.

Der allgemeine Satz, der hier dem im vorigen Abschnitt für Polynome er Variablen angegebenen entspricht, lautet:

Besitzt jedes der Polynome in k Variablen

$$P_\varkappa = \sum \mathfrak{v}_\varkappa(x_1, x_2, \ldots, x_k)\, t_1^{x_1} t_2^{x_2} \ldots t_k^{x_k}$$

unendlichen Folge von Polynomen $P_1, P_2, P_3, \ldots$ von höchstens m-tem ad in jeder Variablen lauter nicht-negative Koeffizienten, die Koeffizienten- nme 1 und hinsichtlich jeder Variablen mindestens ein Paar unmittelbar einanderfolgender (auch im Limes) nicht verschwindender Koeffizienten, haben die Koeffizienten $k_n(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ der Entwicklung des Produktes

$P_2 \ldots P_n = \sum k_n(x_1\, x_2 \ldots x_k)\, t_1^{x_1} t_2^{x_2} \ldots t_k^{x_k}$ *als Funktionen der Indizes $\ldots x_k$, bei gehöriger, von n abhängiger Wahl des Koordinatensystems* nfangspunkt und Achsenrichtungen) *sowie der Maßstäbe für jede Achse d für die k_n selbst, die Form eines Produktes von k Gaußschen nktionen* $\frac{1}{\sqrt{\pi}^k}\, e^{-u_1^2 - u_2^2 - \ldots - u_k^2}$. Die Aufsuchung der genannten Elemente, o der linearen Beziehungen zwischen den x_ι und u_ι, fällt, wie in § 6, 4

beschrieben, wesentlich mit der Aufgabe der *Reduktion einer Fläche zweiter Grades auf Mittelpunkt und Hauptachsen* zusammen.

Die Ausdehnung auf Potenzreihen, die Übertragung auf die Integrale W usw. bedarf keiner besonderen Erklärung. Der exakte Ausdruck für die Forderung hinsichtlich aufeinanderfolgender nicht verschwindender Koeffizienten lautet: Es gibt für jedes $\varkappa$ eine Gruppe von k Zahlen $m_\varkappa^{(\iota)}$ aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots, m-1$ $(\iota = 1, 2, \ldots, k)$, so daß gleichzeitig

$$\mathfrak{v}_\varkappa(x_1', x_2', \ldots, x_{\iota-1}', m_\varkappa^{(\iota)}, x_{\iota+1}', \ldots, x_k') > \mathfrak{v},$$

$$\mathfrak{v}_\varkappa(x_1'', x_2'', \ldots, x_{\iota-1}'', m_\varkappa^{(\iota)} + 1, x_{\iota+1}'', \ldots, x_k'') > \mathfrak{v}$$

für zwei Wertverbindungen $x_1' \ldots x_k'$ und $x_1'' \ldots x_k''$ bei einem von $\varkappa$ unabhängigen positiven Wert von $\mathfrak{v}$.

§ 8.

Der erste Fundamentalsatz.

1. Die Verteilungen. Den Gegenstand der Wahrscheinlichkeitsrechnung bildet die Untersuchung unendlicher Folgen von Elementen, die durch unterscheidende Merkmale gekennzeichnet sind (Würfe mit einer Münze, Ziehungen aus einer Urne usw.); als Merkmal betrachten wir immer einen dem Element zugeordneten Punkt im k-dimensionalen „Merkmalraum“ $(k \geqq 1)$, oder seine Koordinaten $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$. Beispiele solcher unendlich gedachter Folgen sind die Ziehungen aus einer Urne die etwa beim gewöhnlichen Lotto zu einem 5-dimensionalen Merkmalraum führen (Koordinaten sind die 5 Nummern einer Ziehung) oder die Moleküle eines Gases mit dem 3-dimensionalen Merkmalraum ihrer Geschwindigkeiten (Koordinaten sind die 3 Geschwindigkeitskomponenten). Irgendeinem Raumteil R des k-dimensionalen Merkmalraumes mögen die Merkmale von N_R unter den ersten N Elementen der Folge angehören; dann fordern wir die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{N=\infty} \frac{N_R}{N} = V_R, \tag{1}$$

der natürlich eine nicht-negative Zahl, höchstens gleich 1, sein muß. Wir nennen V_R die *Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des „Merkmales R“ innerhalb der betrachteten Folge* oder kurz die Wahrscheinlichkeit von R. Eine Elementenfolge, für welche der Grenzwert (1) hinsichtlich eines jeden Raumteiles existiert (und gewisse weitere Axiome, von denen hier nicht die Rede sein soll, erfüllt sind) — nur solche Folgen werden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Betracht gezogen — nennen wir im Anschluß an einen bekannten Ausdruck ein *Kollektiv*. Der Ausdruck „Wahrschein-

keit eines Merkmales R" hat demnach *nur innerhalb eines wohl-finierten Kollektivs* einen Sinn.

Der in der Regel an die Spitze aller Betrachtungen gestellte Alternativ-, ob ein „Ereignis eintrifft" oder „nicht eintrifft", ordnet sich unserer ffassung in der Weise unter, daß hier ein 1-dimensionaler Merkmalraum liegt, in dem V_R null ist für jedes Gebiet R, das nicht einen von zwei en Punkten (z. B. $x = 0$ und $x = 1$) enthält, und von null verschieden jedes R, dem einer der beiden Punkte angehört. Ein einfaches Bei-el bildet der Ausgangspunkt des Bernoullischen Problems (§ 7, 2), man das Ziehen der weißen Kugel als „Eintreffen", das der schwarzen „Nichteintreffen des Ereignisses" deuten kann, während wir es vor-ogen haben, dem einen Fall die Zahl null, dem anderen die Zahl eins uordnen. Diese Bemerkung zeigt, daß auch von der „Wahrscheinlichkeit das Eintreffen eines Ereignisses" nur dann gesprochen werden kann, nn ein wohldefiniertes Kollektiv vorliegt.

Die Gesamtheit der V_R für alle Teile des Merkmalraumes bildet die *rteilung* des Kollektivs. Bezeichnet R und R' zwei Raumteile ohne meinsame Punkte, so folgt aus der Definition (1) unmittelbar der Satz:

$$V_{R+R'} = V_R + V_{R'}$$

Worten: Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Merkmales R er R' innerhalb des betrachteten Kollektivs ist die Summe aus der Wahr-heinlichkeit für das Auftreten von R und jener für das Auftreten von R'. n pflegt diesen Satz den von der „*Addition der Wahrscheinlichkeiten*" nennen und ihm einen zweiten über die Multiplikation zur Seite zu llen. Bei der Multiplikation handelt es sich aber um etwas ganz deres, nämlich um eine an zwei Kollektivs vorgenommene Operation rch die ein drittes Kollektiv gebildet wird. (Vgl. unter Abschn. 2.)

Die Beziehung (2) gestattet, die Verteilung eines beliebigen Kollektivs rch eine *einzige Funktion* von k Variablen $x^{(1)} \dots x^{(k)}$ darzustellen, hinsichtlich jeder Variablen monoton, nicht abnehmend ist, für $^{(1)} = x^{(2)} = \dots = x^{(k)} = -\infty$ den Wert null und für $x^{(1)} = x^{(2)} = \dots = x^{(k)} = \infty$ n Wert eins annimmt. Eine solche Funktion ist nichts anderes als das, s wir allgemein in § 6, 4 und für den 1-dimensionalen Fall schon in 3, 1 unter dem Namen „Verteilung" eingeführt haben. Der Zusammen-ng zwischen der früheren Bezeichnung $V(\bar{x})$ und der jetzigen V_R wird durch hergestellt, daß $V(\bar{x}) = V_R$ für jenen Raumteil R, dessen Koor-naten $\xi^{(\iota)}$ den Bedingungen $\xi^{(\iota)} \leqq x^{(\iota)}$ (wo $x^{(\iota)}$ die Komponenten von $\bar{x}$) nügen. Durch die Aufnahme des Gleichheitszeichens in die Beziehung ischen $\xi^{(\iota)}$ und $x^{(\iota)}$ wird festgelegt, daß die Funktion $V(\bar{x})$ mit ihrer eren Limes-Funktion zusammenfallen muß. Es bedeutet daher $V(\bar{x})$ die

Wahrscheinlichkeit dafür, daß die erste Merkmalkomponente *höchstens gleich* $x^{(1)}$, die zweite *höchstens gleich* $x^{(2)}$ wird, usf. Die untere Limes-Funktion von $V(\bar{x})$ würde die Wahrscheinlichkeit dafür liefern, daß die erste Komponente *kleiner als* $x^{(1)}$ ist usw.

Unter allen möglichen Verteilungen heben wir zwei praktisch wichtigere Typen hervor, die wir im Anschluß an übliche Ausdrücke als „*arithmetische*" und „*geometrische*" Verteilungen bezeichnen wollen.

Eine Verteilung soll *arithmetisch* heißen, wenn V_R null ist für alle R, die nicht mindestens einen Gitterpunkt eines durch k Einheiten $e_1, e_2, \ldots, e_k$ bestimmten Gitters im Merkmalraum enthalten. Die Verteilung ist in diesem Fall vollständig bestimmt durch die Angabe der endlich oder abzählbar unendlich vielen von null verschiedenen Werte von V_R für alle solche R, die nur je einen Gitterpunkt umfassen. Wir nennen diese V_i die *Einzel- oder Punktwahrscheinlichkeiten* der betreffenden Gitterpunkte und schreiben dafür $\mathfrak{v}(\bar{x})$ oder $\mathfrak{v}(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)})$, wo die $x^{(\iota)}$ die Komponenten von $\bar{x}$ und Koordinaten des Gitterpunktes bezeichnen. Die $\mathfrak{v}(\bar{x})$ sind nicht-negative Zahlen, deren Summe 1 ist. Der obenerwähnte Fall der Alternative, „ob ein Ereignis eintritt oder nicht", ist ein Beispiel für eine 1-dimensionale, arithmetische, zweiwertige Verteilung.

Eine Verteilung heiße *geometrisch*, wenn an jeder Stelle $\bar{x}$ des Merkmalraumes der Grenzwert

$$\lim_{|R|=0} \frac{V_R}{|R|} = v(\bar{x}) \tag{3}$$

existiert, endlich und beschränkt ist. Dabei bedeutet $|R|$ das Volumen des Raumteiles R und der Grenzübergang werde so vollzogen, daß unter Festhaltung von $\bar{x}$ die k Beträge $|x^{(\iota)} - \xi^{(\iota)}|$ gegen null gehen, wenn $\xi^{(\iota)}$ die Koordinaten eines Punktes von R sind. Die Verteilung ist in diesem Falle durch Angabe der Funktion $v(\bar{x})$ vollständig bestimmt, die wir als die *Wahrscheinlichkeitsdichte im Punkte* $\bar{x}$ bezeichnen. Die $v(\bar{x})$ sind nicht negativ und verschwinden derart im Unendlichen, daß das Raumintegral, erstreckt über den ganzen unendlichen Merkmalraum, gleich 1 wird.

Im allgemeinen Fall von Kollektivs mit beliebigen Verteilungen gibt es weder Einzelwahrscheinlichkeiten noch Wahrscheinlichkeitsdichte.

2. Die Grundoperationen. Die Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung bestehen ausschließlich darin, aus den gegebenen Verteilungen gegebener Kollektivs die Verteilungen anderer Kollektivs zu berechnen, die aus den ersteren durch bestimmte Operationen abgeleitet werden. So sind z. B. beim Poissonschen Problem die gegebenen Kollektivs die Folgen der einfachen Züge aus je einer Urne mit den durch $p_\varkappa, q_\varkappa$ bestimmten 1-dimensionalen, arithmetischen Verteilungen $V_\varkappa$ (§ 6, 3). Das abgeleitete

ektiv hat zum Element eine Ziehung aus sämtlichen n Urnen und als
xmal die Summe der gezogenen weißen Kugeln; die gesuchte Ver-
ng W_n ist wieder 1-dimensional und arithmetisch.

Der systematische Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung erfordert
Aufsuchen aller jener Grundoperationen, auf die die Ableitung neuer
ektivs aus gegebenen zurückgeführt werden kann. Ohne hier die
e der Vollständigkeit zu berühren, betrachten wir die folgenden drei
ıdoperationen, welche zur Formulierung der Fundamentalsätze not-
dig sind: die *Mischung*, die *Teilung* und die *Verbindung*.

Unter *Mischung* verstehen wir die Veränderung eines Kollektivs, die
ırch bewirkt wird, daß jedem Punkt $\bar{x}$ des ursprünglichen Merkmal-
ıes ein Punkt $\bar{x}'$ eines neuen Merkmalraumes zugeordnet wird. Die
ınderung ist nur dann wesentlich, wenn die Zuordnung *nicht umkehrbar eutig* ist, z. B. wenn der neue Merkmalraum geringere Dimension hat
die Zuordnung etwa in der Streichung der überschüssigen Koordinaten
eht, oder wenn die ursprüngliche Verteilung geometrisch, die neue
ımetisch ist. Beispiele: Beim sog. „Nadelproblem" besteht das gegebene
ektiv aus den Würfen einer Nadel auf ein von äquidistanten Parallelen
ldetes Strichgitter; Merkmal eines Elementes ist die durch drei Para-
er bestimmte Lage der geworfenen Nadel (3-dimensionale, geometrische
eilung). Ein neues Kollektiv entsteht, wenn wir die Elemente nur
ach unterscheiden, ob die Nadel einen Gitterstrich kreuzt oder nicht
limensionale, arithmetische, zweiwertige Verteilung). Nur wenn die
e Verteilung gegeben ist, kann es Aufgabe der Wahrscheinlichkeits-
nung sein, die zweite zu berechnen — womit sich das sog. Bertrandsche
ıdoxon erledigt. Ein anderer Fall: Die Ziehungen des Zahlenlottos
§ 7, 5) bilden die Elemente eines Kollektivs mit 5-dimensionaler,
ımetischer $90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86$ wertiger Verteilung. Sieht man aber als
xmal einer Ziehung nur die 5 gezogenen Zahlen ohne Rücksicht auf
Reihenfolge oder gar nur ihre Summe bzw. (was auf dasselbe hinaus-
mt) das arithmetische Mittel an, so erhält man neue Kollektivs; das
e Mal ist die Verteilung wieder 5-dimensional, arithmetisch, aber nur
$\frac{9 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$ wertig[11]), das zweite Mal wird sie 1-dimensional, arith-
isch und $(5 \cdot 90 - 4) = 446$ wertig. In beiden Fällen ist also eine
eutige Umkehrung der Zuordnung nicht möglich.

Wie im Falle einer Mischung die neue Verteilung V' gefunden wird,

---

[11]) Und zwar ist jedem Ziehungsergebnis $x_1, x_2, \ldots, x_5$ jener Punkt des Be-
es $\xi_1 > \xi_2 \ldots \xi_5 > 0$ im Merkmalraum zugeordnet, der entweder mit $\bar{x}$ identisch
der durch Spiegelungen an einer oder mehreren der Ebenen $\xi_1 = \xi_2, \ldots, \xi_4 = \xi_5$
übergeht.

ist aus der Definition der Mischung auf Grund der Axiome, die das Kollekti im allgemeinen bestimmen, abzuleiten. Wir setzen, wie es in der Wahr scheinlichkeitsrechnung bisher immer üblich war, das Resultat einfach hin Bezeichnet R' die Punktmenge, in die R durch die Transformation über geht — und wir wollen, da dies für die vorliegenden Zwecke ausreicht, R wieder als einen Raumteil ansehen[12]) — so ist

$$V'_{R'} = V_R = \int_{(R)} dV(\bar{\xi}). \tag{4}$$

Insbesondere erhält man $V'(\bar{x})$, indem man das Stieltjessche Integr von dV über alle jene Raumteile erstreckt, deren Punkte nach der Tran formation in Punkte $\xi^{(\iota)} \leqq x^{(\iota)}$ übergehen.

Die zweite Grundoperation, *Teilung* oder *Aussonderung*, besteh darin, daß der Merkmalraum eines Kollektivs in zwei Räume R_1 und R zerlegt wird und dann alle Elemente, deren Merkmale R_2 angehöre ausgesondert werden. Es bleibt eine Folge von Elementen übrig, dere Merkmale alle in R_1 liegen und die neue Verteilung V' aufweisen, für di

$$V'_A = \frac{V_A}{V_{R_1}}, \qquad V'_B = 0, \tag{5}$$

wenn A ganz in R_1 enthalten ist und B keinen Punkt mit R_1 gemei hat. Daß (5) tatsächlich besteht, ist wieder aus den Axiomen usw. z schließen. Beispiele: Beim obenerwähnten Nadelproblem kann man nac der Wahrscheinlichkeit dafür fragen, daß eine Nadel einen Gitterstric senkrecht kreuzt; dies wäre nur eine andere als die oben angegeben Mischung der ursprünglichen Verteilung. Eine ganz andere Frage aber i es, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Nadel, von der man schon weiß daß sie senkrecht zum Gitterstrich fällt, das Gitter trifft. Hier liegt ein Teilung vor, indem alle jene Nadelwürfe aus der Betrachtung ausgeschlosse werden, bei denen die Nadel schief auffällt. — Ein anderer Fall: Ma stelle sich eine unendliche Folge von Urnen mit schwarzen und weiße Kugeln vor, jede gekennzeichnet durch eine zwischen null und eins liegend Zahl $x^{(1)}$, gleich der Wahrscheinlichkeit eines weißen Zuges aus der betreffe den Urne. Das Element des Kollektivs sei nun ein dreimaliger Zug a irgendeiner der Urnen; sein Merkmal zweidimensional, und zwar erste die Zahl $x^{(1)}$, die der betreffenden Urne zukommt, zweitens die zwischen und 3 inkl. liegende Anzahl $x^{(2)}$ der gezogenen weißen Kugeln. Als gegeb vorauszusetzen ist die Verteilung $V(x^{(1)}, x^{(2)})$; gefragt wird nach d Wahrscheinlichkeit $V'(x^{(1)})$ dafür, daß bei gegebenem $x^{(2)}$, also bei b kanntem Ziehungsergebnis, der Zug aus einer Urne mit irgendeine

[12]) Bei exakter Durchführung der Grundlagen wird man statt von „Raumteile allgemein von *Punktmengen* sprechen.

Wert erfolgt. Auf diese Fragestellung, die zum zweiten Fundamentalsatz
t, kommen wir in den nächsten Paragraphen zurück.

Endlich erklären wir als die *Verbindung* zweier (unabhängiger) Kollek-
die folgende Art, aus zwei Kollektivs mit den Elementen e' bzw. e''
den Verteilungen $V'(\bar{x}')$ und $V''(\bar{x}'')$ ein neues Kollektiv mit den
nenten e und der Verteilung $V(\bar{x})$ abzuleiten. Es sollen die Elemente
$_2$, e_3, ... Kombinationen aus je einem Element e' und einem Element e''
, und zwar so, daß e_1 aus e_1' und e_1'', dann e_2 aus e_2' und e_2'' besteht
Das Merkmal eines solchen Elementes e sei die Zusammenfassung
Merkmale $\bar{x}'$ und $\bar{x}''$, d. h. wenn diese k' bzw. k''-dimensional sind, so
$\bar{x}$ der $k = (k' + k'')$-dimensionale Vektor, dessen erste k Komponenten
denen von $\bar{x}'$, die restlichen mit denen von $\bar{x}''$ übereinstimmen. Ist
Raumteil R' des ersten und ein Raumteil R'' des zweiten Merkmal-
nes gegeben, so ist dadurch ein Raumteil R des neuen, k-dimensionalen
mes bestimmt. Zwischen den drei Verteilungen V', V'' und V besteht
n die Beziehung:

$$V_R = V'_{R'} \, V''_{R''},$$

n Bestehen ebenfalls aus den Forderungen, denen ein Kollektiv ge-
en muß, zu begründen ist. Beispiele für diesen Fall sind leicht an-
eben: Besteht jedes der gegebenen Kollektivs aus den Würfen mit
m Würfel, deren Merkmal die Zahl der obenliegenden Augen ist, so
das abgeleitete Kollektiv zum Element einen Wurf mit beiden Würfeln,
en Merkmal von den beiden Augenzahlen gebildet wird. Man fragt
n der Wahrscheinlichkeit, mit dem ersten Würfel eine gewisse Augen-
x', mit dem zweiten die Augenzahl x'' zu werfen. Alle drei Ver-
ungen sind arithmetisch, die beiden gegebenen 1-dimensional und 6-wertig,
der „Verbindung" 2-dimensional und 36-wertig.

Diese Andeutungen über die Grundoperationen müssen hier genügen.
die verschiedenen sich aufdrängenden Fragen, namentlich auf die der
echtigung der Anwendung dieser Begriffskonstruktionen auf Vorgänge
Wirklichkeit, kann in diesem Zusammenhange nicht eingegangen werden.

3. Zusammengesetzte Operationen, Faltung. Aus der in mannig-
er Weise möglichen Zusammensetzung von Grundoperationen entstehen
jene Ableitungen neuer Kollektivs aus gegebenen, deren Untersuchung
gesamten Inhalt der Wahrscheinlichkeitsrechnung bildet. So wie die
onelle Mechanik nicht etwa die Antwort auf die Frage gibt, welche Be-
ung ein bestimmter Körper zu einer bestimmten Zeit besitzt, sondern
die, wie man aus gegebener Anfangsgeschwindigkeit und gegebenem
fteverlauf die Bewegung zu irgendeinem Zeitpunkt berechnet, so liegt es
n hier: Aus den bekannten Verteilungen der gegebenen Kollektivs werden

die Verteilungen der abgeleiteten berechnet. Alle scheinbaren Paradoxie und Unbestimmtheiten verschwinden mit Annahme dieser Formulierung au der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Natürlich bleiben — ebenso wie in de Mechanik und allen anderen exakten Naturwissenschaften — gewisse Schwierig keiten übrig, die in dem Übergang zwischen der Theorie und der Wirklichkei liegen. Sie sind hier im wesentlichen doppelter Natur: Man bedarf einma gewisser (experimenteller) Methoden, um die jedem Problem zugrunde liegenden *„Ausgangs-Wahrscheinlichkeiten"* zu ermitteln (in der Mechani die Anfangsgeschwindigkeiten usw.), und man muß zweitens in jedem ein zelnen Fall den *„Ansatz"* finden, d. h. das Problem auf die Grundopera tionen zurückführen (in der Mechanik die kinematischen und dynamische Eigenschaften des Systems feststellen).

Die beiden Fundamentalsätze, die wir in der vorliegenden Arbe entwickeln, beziehen sich auf zwei ganz bestimmte zusammengesetzt Operationen, die wir als die *Faltung* und die *Kreuzung* von n Kollektiv bezeichnen. Die zweite der eben genannten Schwierigkeiten wird als dadurch ausgeschaltet, daß wir von vornherein *bestimmte Konstruktione* betrachten, durch welche das neue Kollektiv aus den gegebenen hervor geht. Die erste entfällt von selbst, weil es gerade den wesentlichste Inhalt der Fundamentalsätze ausmacht, daß sie etwas über die Verteilun des abgeleiteten Kollektivs bei in weiten Grenzen *willkürlicher Wahl de ursprünglichen Verteilungen* aussagen.

Wir verstehen unter der *Faltung von n* (unabhängigen) *Kollektiv* mit k-dimensionalen Merkmalen die *Zusammensetzung aus einer n-fache Verbindung* (durch die ein Kollektiv mit kn-dimensionalem Merkmal ent steht) und einer *darauffolgenden Mischung*, die das Merkmal wiede zu einem k-dimensionalen macht. Sei e_1 das Element des ersten gegebene Kollektivs, $\bar{x}_1$ sein Merkmal, ebenso e_2, $\bar{x}_2$ Element und Merkmal de zweiten usf., so besteht ein Element E_n der n-ten Verbindung aus eine Kombination, für die wir symbolisch $e_1 e_2 e_3 \dots e_n$ schreiben wollen. Da Merkmal des Elementes E_n setzt sich aus den kn Komponenten der Vek toren $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ zusammen. Die Mischung sei definiert durch ein k-wertige Gleichung:

$$\bar{x} = \bar{X}_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k), \tag{7}$$

wobei der k-dimensionale Vektor $\bar{x}$ das Merkmal des Elementes E_n de Faltung bezeichnet.

Sind $V_1(\bar{x}_1)$, $V_2(\bar{x}_2)$, ... die n Verteilungen der gegebenen Kollektiv so erhält man die Verteilung $W_n(\bar{x})$ der n-ten Faltung in der Form:

$$dW_n(\bar{x}) = \int\int \dots \int dV_1(\bar{x}_1)\, dV_2(\bar{x}_2) \dots dV_n(\bar{x}_n), \tag{3}$$

ei die $k(n-1)$-fache Integration rechts über alle Wertverbindungen $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ zu erstrecken ist, welche bei festem $\bar{x}$ der Gleichung (7) gen.

Hat die Gleichung (7) die Form einer *linearen* Beziehung

$$\bar{x} = h_1(\bar{x}_1 - \bar{c}_1) + h_2(\bar{x}_2 - \bar{c}_2) + \ldots + h_n(\bar{x}_n - \bar{c}_n),$$

n die $h_\varkappa$ und $\bar{c}_\varkappa$ gegebene Konstante sind, so sprechen wir von einer *ären Faltung*. Sind alle $h_\varkappa = 1$, so nennen wir die Faltung eine *menbildung aus n Kollektivs*, sind alle $h_\varkappa = \frac{1}{n}$, so nennen wir sie *chschnittsbildung*[13]).

In jedem Fall der linearen Faltung kann man (8) formal nach $\bar{x}$ grieren und erhält, wenn $h_n \neq 0$ vorausgesetzt wird:

$$= \int\int \ldots \int V_n\left(\bar{c}_n + \frac{\bar{x} - h_{n-1}(\bar{x}_{n-1} - \bar{c}_{n-1}) - \ldots - h_1(\bar{x}_1 - \bar{c}_1)}{h_n}\right) dV_{n-1}(\bar{x}_{n-1}) \ldots dV_1($$

sieht hieraus, daß das in § 3, 1 eingeführte Integralprodukt von rteilungen, im 1-dimensionalen Fall und für $h_1 = h_2 = \ldots = h_n = \frac{1}{r_n}$, $c_2 + \ldots + c_n = b_n$, gerade die Verteilung der n-ten linearen Faltung rt. Die Ausdehnung auf andere $h_\varkappa$ und auf mehrere Dimensionen ist 6, 3 bzw. § 6, 4 erfolgt.

4. Der erste Fundamentalsatz. Der erste Fundamentalsatz der rscheinlichkeitsrechnung enthält eine allgemeine Aussage über die Ver- ng W_n, zu der im Limes für $n = \infty$ die fortgesetzte lineare Faltung n gegebenen Kollektivs führt. Um den Satz in Kürze aussprechen können, führen wir den Begriff der „für die Faltung normalen Ver- ngen" und einer „gleichmäßigen Folge" solcher Verteilungen ein.

Eine Verteilung soll als *für die Faltung normal* bezeichnet werden lgenden Fällen:

a) Eine *arithmetische* Verteilung, wenn 1. nach jeder der k Koordi- nrichtungen wenigstens ein Paar benachbarter Gitterpunkte existiert, lenen die Einzelwahrscheinlichkeit nicht verschwindet; 2. das erste, te und dritte Moment der Verteilung (in jeder Komponente) endlich ist.

b) Eine *geometrische* Verteilung, wenn 1. die Wahrscheinlichkeitsdichte jeder Dimension von beschränkter Schwankung ist; 2. das erste, te und dritte Moment der Verteilung (in jeder Komponente) endlich ist.

c) Eine *allgemeine* Verteilung, wenn 1. ihre Streuung (die Deter- ante der Streuungsmatrix) nicht verschwindet; 2. jedes Moment m-ter ung ($m = 1, 2, \ldots$) endlich ist.

[13]) An Stelle der skalaren Größen h könnten auch dyadische (Matrizen) treten, daß sich im folgenden etwas wesentlich ändern würde.

Eine unendliche Folge derartiger Verteilungen soll *gleichmäßig* heißen, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: In den Fällen a), b) und c) sollen die unter 2. als endlich vorausgesetzten Momente beschränkte Folgen bilden; ferner soll im Falle

a) die Einzelwahrscheinlichkeit für je *ein* Paar benachbarter Gitterpunkte nach jeder Koordinatenrichtung eine von null verschiedene untere Schranke haben (das Gitter ist für alle Verteilungen als gleich vorausgesetzt);

b) die Gesamtschwankung der Wahrscheinlichkeitsdichte nach jeder Dimension eine obere Schranke besitzen;

c) die Summe der Streuungen (die Determinante der Summe der Streuungsmatrizes) stärker als mit der $^2/_3$ Potenz von n ins Unendliche wachsen.

Unter Verwendung dieser Bezeichnungen sprechen wir den *erste Fundamentalsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung* wie folgt aus:

Die fortgesetzte lineare Faltung unendlich vieler k-dimensionaler Kollektivs, deren Verteilungen eine gleichmäßige Folge für die Faltung normaler Verteilungen bilden, bei konstanten oder wenigstens in endlichen Grenzen liegenden Koeffizienten $\bar{c}_\varkappa$ und Verhältnissen $h_1 : h_2 : h_3 \ldots$ in Gleichung (7′) führt auf das Gaußsche Gesetz: Es läßt sich stets eine von n abhängige Koordinatentransformation im k-dimensionalen Raum von $\bar{x}$ auf $\bar{u}$ (Verschiebung des Anfangspunktes, Drehung der Achsen und Veränderung der Maßstäbe) *angeben, so daß*

a) *bei arithmetischen Verteilungen die Einzelwahrscheinlichkeit $\mathfrak{w}_n(\bar{x})$ der n-ten Faltung im Limes für $n = \infty$ proportional $e^{-u_1^2 - u_2^2 - \ldots - u_k^2}$ wird;*

b) *bei geometrischen Verteilungen die Wahrscheinlichkeitsdichte $w_n(\bar{x})$ der n-ten Faltung im Limes für $n = \infty$ proportional $e^{-u_1^2 - u_2^2 - \ldots - u_k^2}$;*

c) *im allgemeinen Falle, also auch für* a) *und* b), *die Verteilungsfunktion $W_n(\bar{x})$ im Limes für $n = \infty$ gleich dem Produkt $\Phi(u_1)$ $\Phi(u_2) \ldots \Phi(u_k)$, wo $\Phi(u)$ die Gaußsche Funktion $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int^u e^{-x^2} dx$ bezeichnet.*

Der Beweis dieses Satzes ist für den Fall $k = 1$ und $h_1 = h_2 = \ldots = h$ durch die Beweise der Behauptungen III bis V des § 3 gedeckt. Dabei ist hinsichtlich der in der Festlegung der „normalen" Verteilungen und ihrer „gleichmäßigen" Folgen eingeschlossenen Voraussetzungen von den Korollaren § 6, 1 und 2 Gebrauch gemacht. Die Ausdehnung auf k Dimensionen und von 1 verschiedene Verhältnisse $h_1 : h_2 : h_3 \ldots$ wird durch die Korollare § 6, 4 und § 6, 3 gerechtfertigt.

5. Summenbildung. Erster Satz der Fehlertheorie. Es be-
et keine Einschränkung des Inhaltes des Fundamentalsatzes, wenn
von vornherein die Koeffizienten $h_\varkappa$ der Gl. (7′) als untereinander
h voraussetzen; denn in der Koordinatentransformation, die der Satz
angt, ist eine Veränderung der Maßstäbe ausdrücklich eingeschlossen.
chen wir also von *Summenbildung* statt allgemein von „linearer
ung", so umfaßt, auf *arithmetische* Verteilungen angewendet, der erste
damentalsatz gerade die Aussagen des Bernoullischen und Poisson-
n Gesetzes, einschließlich der weitgehenden Verallgemeinerungen, die
vorangehenden Paragraph behandelt wurden. In der üblichen Aus-
ksweise würde die allgemeine Aussage etwa lauten:

Die Wahrscheinlichkeit, in n unabhängigen Ziehungen eine Summe $\bar{x}$
ziehen, wird für hinreichend große n proportional dem Ausdruck
$^{-u_1^2-u_2^2-\cdots-u_k^2}$ (wo die u linear aus den Komponenten von $\bar{x}$ zu berechnen
), *gleichgültig, welche Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Ziehungs-*
bnisse bestehen, wofern nur die sehr weiten, allgemeinen Voraussetzungen
Fundamentalsatzes (der „normalen" Verteilung und der „gleichmäßigen"
ge) *erfüllt sind.*

In dieser Form und insbesondere auch dann, wenn man die einzelnen
eilungen als *„geometrisch"* voraussetzt, d. h. annimmt, daß überall
endliche Wahrscheinlichkeitsdichte besteht, bietet der erste Funda-
talsatz die *allgemeine und präzise Formulierung des Gaußschen*
lergesetzes im Sinne der Theorie der Elementarfehler. Denn man
n unseren Satz b) wie folgt aussprechen:

Läßt sich ein Beobachtungsfehler als Summe von n unabhängigen
zelfehlern auffassen, so wird die Wahrscheinlichkeitsdichte für eine
bene Fehlergröße $\bar{x}$ *bei hinreichend großem n proportional dem Aus-*
ck $e^{-u_1^2-u_2^2-\cdots-u_k^2}$ (wo die u linear aus den Komponenten von $\bar{x}$ zu
chnen sind), *gleichgültig, welchen Fehlergesetzen die einzelnen Ele-*
tarfehler genügen, wofern nur die sehr weiten, allgemeinen Bedingungen
Fundamentalsatzes (Beschränktheit der Gesamtschwankung und der
en drei Momente) *erfüllt sind.*

Die bekannten Ableitungen des Fehlergesetzes aus der Kombination
Elementarfehlern gehen von viel engeren Voraussetzungen aus. In
Regel wird (mit $k = 1$) als Gesetz des Elementarfehlers angenommen.
seine Wahrscheinlichkeitsdichte $v_\varkappa(x)$ für einen endlichen Teil der
chse gleich einer *konstanten*, von null verschiedenen Größe, im übrigen
sei[14]). In diesem speziellen Falle sind natürlich unsere Voraus-

[14]) Vgl. z. B. E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Bd. I, 3. Aufl., Leipzig
, S. 173 ff.

setzungen über die $v_x(x)$ reichlich erfüllt. Die korrekte Ableitung d Ergebnisses wird aber kaum einfacher als die allgemeine in § 3, 6 g gebene Betrachtung.

Wir nennen den eben ausgesprochenen Satz, wonach der als Sum sehr vieler Elementarfehler erscheinende Fehler dem Gaußschen Gese genügt, den *ersten Satz der Fehlertheorie*, weil ihm ein zweiter eber wichtiger — als Folgerung aus dem zweiten Fundamentalsatz — z Seite tritt (§ 10, 4).

6. Durchschnittsbildung. Erstes Gesetz der großen Za Setzt man in (7′) alle Koeffizienten $h = \frac{1}{n}$ und die $c = 0$, so bedeu die durch (8′) definierte Größe $W_n(\bar{x})$ die Wahrscheinlichkeit dafür, d das *arithmetische Mittel* oder der Durchschnitt der Merkmale von n u abhängigen Kollektivs „höchstens gleich $\bar{x}$“ wird (d. h. jede Komponer des Schwerpunktvektors der n Merkmalpunkte kleiner oder höchstens glei der betreffenden Komponente von $\bar{x}$). Fassen wir, um uns konkre ausdrücken zu können, den Fall einer eindimensionalen, arithmetisch Verteilung ins Auge, so haben wir in $\mathfrak{w}_n(x)$ die Wahrscheinlichkeit daf daß das arithmetische Mittel von n unabhängigen Ziehungsergebnis gerade x beträgt. Nun ist für den allgemeinen eindimensionalen F § 7, 4, der Zusammenhang zwischen dem Argument u der Gaußsch Funktion und der Summe x der Ziehungsergebnisse mit $x = r_n u + b_n$ Anschluß an Gl. (9), § 7 festgelegt worden. Bezeichnen wir jetzt st der Summe das arithmetische Mittel mit x, so müssen wir in die v stehende Beziehung nx statt x einführen, erhalten also für große n:

$$(9) \qquad r_n \mathfrak{w}_n(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{nx-b_n}{r_n}\right)^2},$$

oder nach einfacher Umformung

$$(9') \qquad \mathfrak{w}_n\left(\frac{b_n}{n} + x\right) \sim \frac{1}{r_n\sqrt{\pi}} e^{-\frac{n^2}{r_n^2}x^2}.$$

Da r_n^2, die doppelte Streuungssumme der einzelnen Verteilungen, ni stärker als mit n wachsen kann, weil die Streuungen in allen von u betrachteten Fällen eine beschränkte Folge bilden, so erkennt man, d der Faktor von x im Exponenten von (9′) mit n unbeschränkt wäch D. h. *die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das arithmetische Mittel Ziehungsergebnisse um einen festen Betrag x von $\frac{b_n}{n}$ abweicht, geht wachsendem n gegen null.*

Man sieht leicht ein, daß dieser Satz für *jede* Durchschnittsbildu bei den von uns betrachteten Verteilungen gilt, aber auch, daß zu sei

bleitung keineswegs alle die Überlegungen notwendig sind, die zu dem undamentalsatz geführt haben. Es genügt, davon auszugehen, daß, wie n Gl. (10), § 3 festgestellt wurde, die Streuung des Integralproduktes onstant gleich $\frac{1}{2}$ ist. Denn die Bildung des Integralproduktes entspricht er Annahme $h_1 = h_2 = \ldots = \frac{1}{r_n}$, die Durchschnittsbildung der Annahme $_1 = h_2 = \ldots = \frac{1}{n}$. Daher ist im letzteren Fall die Streuung $\frac{r_n^2}{n^2}$ mal so roß, also gleich

9″) $$\frac{1}{2} \cdot \frac{r_n^2}{n^2} = \frac{\Sigma s_\varkappa^2}{n^2} \leqq \frac{S^2}{n},$$

enn S^2 die obere Schranke der Streuungen bezeichnet. Man erhält so en allgemeinen Satz, der in der Regel als das „Gesetz der großen Zahl" ezeichnet wird und für uns als eine spezielle Folgerung aus dem ersten undamentalsatz *„erstes" Gesetz der großen Zahl* heißen soll:

Die fortgesetzte Durchschnittsbildung von Kollektivs mit Verteilungen, eren Streuungen eine beschränkte Folge bilden, führt zu Verteilungen mit nbeschränkt abnehmender Streuung.

Auf diesen einfachen Gedankengang haben erstmals Tschebyschef nd Markoff die Ableitung des Gesetzes der großen Zahl zurückgeführt[15]). eht die Streuung $s^2 = \int (x-a)^2 v(x) dx$ gegen null, so muß auch das ntegral von $v(x)$ für jedes Intervall, das den Punkt $x = a$ nicht enthält, egen null, für jedes andere gegen eins gehen. In engerem Anschluß an ie übliche Ausdrucksweise der Wahrscheinlichkeitsrechnung wäre daher der atz etwa so auszusprechen:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Durchschnitt von n unabängigen Ziehungsergebnissen höchstens um ε von seinem Mittelwert abweicht, geht bei festem, beliebig kleinem ε, aber unbeschränkt wachsendem , gegen 1.

Mit fast unverändertem Wortlaut gilt der Satz auch für mehrimensionale Verteilungen.

§ 9.

Das Bayessche Problem und seine Verallgemeinerung.

1. Bayessches Problem. In ähnlicher Beziehung wie die von aplace gegebene Lösung des Bernoullischen Problems zum ersten undamentalsatz, steht die ebenfalls von Laplace angegebene Form des

[15]) Vgl. A. A. Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung, dtsch. von H. Liebmann, Leipzig 1912, S. 58. — Es sei noch bemerkt, daß mitunter der ganze Inhalt es Laplaceschen Resultats, einschließlich der Konvergenz von W_n gegen die außsche Funktion als „Gesetz der großen Zahl" bezeichnet wird.

Bayesschen Theorems, die oft auch als eine „*Umkehrung des Bernoull*schen *Satzes*“ bezeichnet wird, zum „*zweiten Fundamentalsatz*“ d Wahrscheinlichkeitsrechnung. Wir geben zunächst eine Darstellung d Aufgabe und ihrer Lösung im Anschluß an die übliche Ausdrucksweis die Einordnung in das durch „Grundoperationen“ und ihre Zusamme setzung, nach § 8, festgelegte System der Wahrscheinlichkeitsrechnung s im § 10 erfolgen.

Für eine Urne, die schwarze und weiße (oder mit null und eins b zeichnete) Kugeln enthält, betrage die Wahrscheinlichkeit eines weiß Zuges x $(0 < x < 1)$. In n Zügen (vor denen jedesmal die vorher g zogene Kugel zurückgelegt wurde), seien an mal $(0 < a < 1)$ wei Kugeln gezogen worden. Die Wahrscheinlichkeit dieser Verbindung ist

$$(1) \qquad \binom{n}{an} [x^a (1-x)^{1-a}]^n.$$

Die Fragestellung von Bayes geht nun dahin: Wenn a bekannt i welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß die n Züge aus einer Ur erfolgten, der gerade die Wahrscheinlichkeit x eines weißen Zuges er spricht? Laplace nimmt an, daß die „a priori-Wahrscheinlichkeit“ ein jeden Wertes von x dieselbe ist, und setzt die gesuchte Wahrscheinlic keitsdichte $w_n(x)$ an der Stelle x:

$$(2) \qquad w_n(x) = C_n [x^a (1-x)^{1-a}]^n, \qquad 0 \leqq x \leqq$$

wo C_n so zu bestimmen ist, daß

$$(2') \qquad \int_0^1 w_n(x)\, dx = 1$$

wird.

Um den asymptotischen Wert von (2) für sehr große n zu erhalt ziehen wir unsere Sätze I und II über den Grenzwert eines Produk von Funktionen heran. Setzt man

$$(3) \quad f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^a \left(\frac{1-x}{1-a}\right)^{1-a} \quad \text{für} \quad 0 < x < 1,$$
$$= 0 \qquad \text{„} \quad x \geqq 1, \quad x \leqq$$

so genügen diese $f(x)$ sämtlichen Voraussetzungen des § 1, sobald $0 < a < 1$. Insbesondere erreicht $f(x)$ an der Stelle $x = a$ sein Maxim in dem Wert 1 und man hat:

$$(3') \qquad f(a) = 1, \qquad f'(a) = 0, \qquad f''(a) = -\frac{1}{a(1-a)},$$

somit nach (a 1) und (4) in § 1:

$$(3'') \qquad s_1^2 = s_2^2 = \ldots = \frac{1}{2a(1-a)}, \qquad r_n^2 = \frac{n}{2a(1-a)}.$$

Da sich $w_n(x)$ nach (2) nur um einen konstanten Faktor von d

rodukt $p_n = f_1 \cdot f_2 f_3 \dots f_n$ unterscheidet und dieser Faktor gemäß (2′) wählen ist, so führt unser Satz I zu der Aussage:

a) $$w(u) = \lim_{n=\infty} w_n\left(a + u\sqrt{\frac{2a(1-a)}{n}}\right) = \sqrt{\frac{n}{2\pi a(1-a)}}\, e^{-u^2} = \sqrt{\frac{n}{2a(1-a)}}\,\varphi(u),$$

nd Satz II zu

$$W(u) = \lim_{n=\infty} W_n\left(a + u\sqrt{\frac{2a(1-a)}{n}}\right) = \lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{a+u\sqrt{\frac{2a(1-a)}{n}}} w_n(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-x^2}\,dx = \Phi(u).$$

Als *Näherungsformeln für große n* geschrieben, lauten (4a) und (4b):

′a) $$w_n(x) \sim \sqrt{\frac{n}{2a(1-a)}}\,\varphi\left(\sqrt{\frac{n}{2a(1-a)}}\,(x-a)\right),$$

′b) $$W_n(x) \sim \Phi\left(\sqrt{\frac{n}{2a(1-a)}}\,(x-a)\right).$$

Dies ist die sog. Umkehrung des Bernoullischen Theorems, die in r üblichen Ausdrucksweise besagt:

Die aus einer sehr großen Anzahl von Ziehungen aus einer Urne it zweierlei Kugeln erschlossene Wahrscheinlichkeit dafür, daß die ahrscheinlichkeit eines Einzelzuges x beträgt, folgt dem Gaußschen esetz.

Die von Laplace herrührende und heute allgemein vorherrschende bleitung dieses Satzes besteht darin, daß für die spezielle, in (3) ge- bene Form der Funktionen f_x die Überlegungen durchgeführt werden e uns in § 1 zu dem allgemeinen Satz I geführt haben[16]); die Geltung n (4b) wird dann aus (4a) in meist unzulässiger Weise erschlossen.

2. Einfluß ungleicher „a priori-Wahrscheinlichkeit". Bayes t auch den Fall betrachtet, daß die Wahrscheinlichkeit der verschie- nen Werte von x von vornherein nicht dieselbe ist. Nehmen wir an, sei eine beliebige *stetige* Funktion $\psi(x)$ gegeben, welche die „a priori"- ahrscheinlichkeitsdichte an der Stelle x angibt, dann tritt an Stelle von (2):

) $$w_n(x) = C_n\,\psi(x)\,[x^a(1-x)^{1-a}]^n,$$

o C_n wieder aus der Bedingung (2′) zu bestimmen ist. Nach dem in 2, 2 abgeleiteten Korollar folgt aber, daß $\lim w_n$ sich nur um den onstanten Faktor $\psi(a)$ von dem früheren Wert unterscheiden kann. a dieser Faktor, den wir von null verschieden voraussetzen, bei Bestim- ung von C_n nach (2′) wieder herausfallen muß. so sieht man:

[16]) Für den Beweisansatz von H. Bruns, a. a. O. S. 232, gilt wieder das in Fuß- te [10]) Gesagte.

Die Ergebnisse (4a), (4b) *und* (4'a), (4'b) *gelten unverändert, wenn eine beliebige stetige, an der Stelle* $x = a$ *nicht verschwindende a priori Wahrscheinlichkeit für* x *vorausgesetzt wird.*

E. Czuber hat unter speziellen Annahmen für ψ erkannt, daß der Einfluß von $\psi(x)$ auf w_n bei großem n zurücktritt[17]). Der entscheidende allgemeine Wert des Laplaceschen Resultates (4) liegt offenbar erst in seiner hier bewiesenen Unabhängigkeit von der Annahme über die „a priori Wahrscheinlichkeit".

Wenn $\psi(x)$ an der Stelle $x = a$ eine Unstetigkeit erster Art hat, also einen rechten und einen linken Grenzwert $\psi(a+0) = \psi_1$ und $\psi(a-0) = \psi_2$, so ist

$$(5') \quad \lim_{n=\infty} w_n\left(a + u\sqrt{\frac{2a(1-a)}{n}}\right) = \frac{2\psi_1}{\psi_1+\psi_2}\sqrt{\frac{n}{2a(1-a)}}\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-u^2} \quad \text{für } u > 0$$

$$= \frac{2\psi_2}{\psi_1+\psi_2}\sqrt{\frac{n}{2a(1-a)}}\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-u^2} \quad \text{für } u <$$

Hieraus folgt der Wert von W_n durch Integration; an der Stelle $x =$ gibt es keine bestimmte Wahrscheinlichkeitsdichte $w(0)$.

Wird die a priori-Wahrscheinlichkeit durch eine arithmetische Ver teilung dargestellt, so kann man wohl für endliches n

$$W_n(x) = C_n \sum \psi(x_i)\,[x_i^a(1-x_i)^{1-a}]^n$$

ansetzen, wobei die Summe über alle $x_i \leqq x$ zu erstrecken und C_n wied aus (2') zu bestimmen ist. Aber man kann daraus nur schließen, d die Einzelwahrscheinlichkeit jenes Wertes x_i, der a zunächst liegt, m zunehmendem n alle anderen überwiegt und unbeschränkt nahe an heranrückt.

3. Mehrdimensionaler Fall. Wenn die Urnen, aus denen gezog wird, nicht nur schwarze und weiße (oder mit Null und Eins bezeichnet *sondern* $1, 2, \ldots, k$ *wertige Kugeln* oder Lose enthalten, so führt Bayessche Fragestellung auf den durch die Korollare I_4 und II_4 § 2 gedeckten Fall eines Produktes von Funktionen mehrerer Variabl Das ist *nicht* analog den Verhältnissen bei der Bernoullischen Proble gruppe, wo das Vorhandensein mehrwertiger Lose noch nicht zum me dimensionalen Fall führte (§ 7, 4), sondern erst die Betrachtung v Ziehungsserien als Elementen (§ 7, 5).

Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_k$ die Wahrscheinlichkeiten eines Einzelzug der „eins" bzw. „zwei" ... „k" ergibt, und es seien tatsächlich in n Zü

---

[17]) E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Bd. I, 3. Aufl., Leipzig 1914, S.

$a_1, na_2, \ldots, na_k$ mit $1, 2, \ldots, k$ bezeichnete Kugeln gezogen worden, daß

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 1, \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 1.$$

ie Wahrscheinlichkeit dieses Resultates bei gegebenen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ wäre roportional

$$\left[x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_{k-1}^{a_{k-1}} (1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{k-1})^{a_k}\right]^n.$$

Sind durch $\psi_1(x_1), \psi_2(x_2), \ldots, \psi_{k-1}(x_{k-1})$ die „a priori-Wahrscheinchkeiten" der einzelnen x-Werte gegeben, so hat man als Beantwortung der ayesschen Frage nach der Wahrscheinlichkeitsdichte $w_n(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})$ afür, daß unter Annahme des durch $na_1, na_2, \ldots, na_k$ bestimmten iehungsresultates die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Kugelarten bei $x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k$ liegen:

$$w_n(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}) = C_n \psi_1(x_1)\, \psi_2(x_2) \ldots \psi_{k-1}(x_{k-1}) \times \left[x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_{k-1}^{a_{k-1}} (1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{k-1})^{a_k}\right]^n,$$

obei C_n durch die Bedingung

$$\int\int \ldots \int w_n(x_1 x_2 \ldots x_{k-1})\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{k-1} = 1$$

ı eliminieren ist.

Um den asymptotischen Ausdruck für (6″) zu finden, setzen wir im inne von § 2, 4:

$$f_1 = f_2 = \ldots = f = \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{a_1} \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{a_2} \ldots \left(\frac{x_{k-1}}{a_{k-1}}\right)^{a_{k-1}} \left(\frac{1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{k-1}}{a_k}\right)^{a_k},$$

für $0 < x_\iota < 1$,

$$= 0, \quad \text{für} \quad x_\iota \leqq 0,\ x_\iota \geqq 1$$

ie Funktion $f(x_1 \ldots x_{k-1})$ erreicht im Punkte $x_1 = a_1,\ x_2 = a_2 \ldots x_{k-1} = a_{k-1}$ ihr Maximum mit dem Wert 1. Man findet

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_\iota}(a_1 \ldots a_{k-1}) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_\iota^2}(a_1 \ldots a_{k-1}) = -\left(\frac{1}{a_\iota} + \frac{1}{a_k}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_\iota \partial x_\varkappa}(a_1 \ldots a_{k-1}) = -\frac{1}{a_k} \qquad (\iota \neq \varkappa)$$

nd daraus für die mit (5‴) in § 2 eingeführten Größen h:

$$h_{\iota,\varkappa} = \frac{1}{2 a_k} \quad (\iota \neq \varkappa), \qquad h_{\iota,\iota} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_\iota} + \frac{1}{a_k}\right).$$

Setzt man

$$Q(z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}) \equiv \sum_{\iota,\varkappa} h_{\iota,\varkappa} z_\iota z_\varkappa = \frac{1}{2}\left[\sum_{\iota=1}^{k-1} \frac{z_\iota^2}{a_\iota} + \frac{1}{a_k}\left(\sum_{\iota=1}^{k-1} z_\iota\right)^2\right],$$

so besagt unser Korollar I_4:

$$\text{(8a)} \qquad \lim_{n=\infty} w_n\left(a_1 + \frac{z_1}{\sqrt{n}}, a_2 + \frac{z_2}{\sqrt{n}}, \ldots, a_{k-1} + \frac{z_{k-1}}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{n^{k-1}}{(2\pi)^{k-1} a_1 a_2 \ldots a_k}}\, e^{-Q(z_1, z_2, \ldots, z_{k-1})}$$

und analog II_4:

$$\text{(8b)} \qquad \lim_{n=\infty} W_n\left(a_1 + \frac{z_1}{\sqrt{n}}, \ldots, a_{k-1} + \frac{z_{k-1}}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \int_{a_1 + \frac{z_1}{\sqrt{n}}}^{a_{k-1} + \frac{z_{k-1}}{\sqrt{n}}} \ldots \int w_n(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{k-1}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2^{k-1} a_1, a_2, \ldots, a_k}} \int_{}^{z_1} \int_{}^{z_2} \ldots \int_{}^{z_{k-1}} e^{-Q(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{k-1}.$$

Der Faktor vor dem Integralzeichen rechts in (8b) ist die Quadra wurzel aus der Determinante der quadratischen Form Q. Wir habe somit als Verallgemeinerung des Laplace-Bayesschen Theorems in de üblichen Darstellungsform den Satz:

Die aus einer sehr großen Zahl von Ziehungen aus einer Urne m k verschiedenen Kugelarten erschlossene Wahrscheinlichkeit dafür, daß d Wahrscheinlichkeit eines Einzelzuges jeder Kugelart bei x_1 bzw. $x_2, \ldots,$ liegt, folgt einem $(k-1)$-dimensionalen Gaußschen Gesetz, gleichgülti welche a priori-Wahrscheinlichkeiten für die $x_1, x_2, \ldots, x_k$ angenomme wurden.

Wir werden diesen Satz mit gewissen Verallgemeinerungen, im Rahme der in § 8 angedeuteten rationellen Begriffsbildung der Wahrscheinlich keitsrechnung, weiter unten als den „zweiten Fundamentalsatz der Wah scheinlichkeitsrechnung" aussprechen. Hier soll noch eine Folgerung da gelegt werden, die einem von Laplace formulierten, von Bienaymé i wesentlichen bewiesenen, speziellen Resultat entspricht.

4. Laplace-Bienayméscher Satz. Laplace hat als allgemei Umkehrung des Bernoullischen Problems folgende Frage behandelt. A einer Urne, die k verschiedene, etwa mit $1, 2, 3, \ldots, k$ bezeichnete Lo enthält, werden (wie oben) in n Zügen $a_1 n$ Lose der ersten, $a_2 n$ d zweiten, . . ., $a_k n$ der letzten Art gezogen; die unbekannte Wahrschei lichkeit eines Zuges der ersten Art sei wieder x_1, die eines Zuges zweit Art x_2, . . . usf. bis x_k, so daß wieder die beiden Gl. (6) gelten. Set man nun

)
$$A = \sum_{m=1}^{k} m a_m, \qquad X = \sum_{m=1}^{k} m x_m,$$

obei A der „scheinbare", X der „wahre" Mittelwert der in der Urne thaltenen Werte heißt, so wird nach der Wahrscheinlichkeitsdichte $v_n(x)$ für gefragt, daß die Abweichung $X - A$ bei x liegt. Der „wahre" ittelwert X ist nichts anderes als die Größe, die nach der Definition des ahrscheinlichkeitsbegriffes als arithmetisches Mittel einer ins Unendliche rtgesetzten Ziehungsserie sich ergeben müßte. Für große n folgt $v_n(x)$ ach Laplace dem Gaußschen Gesetz.

Wir erkennen unschwer in dieser Fragestellung eine spezielle, in dem lgemeinen mehrdimensionalen Bayesschen Problem enthaltene Frage, eren Beantwortung mit Hilfe von (8a) leicht möglich ist. Integriert an nämlich $w_n(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})$ über alle Wertverbindungen $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ ei konstantem X, so gewinnt man die Wahrscheinlichkeitsdichte für das utreffen des „wahren" Mittelwertes X. Die Vertauschung der Reihen-lge des Grenzüberganges zu $n = \infty$ und der Integration ist zulässig, eil die f in Abschn. 3 auch alle Voraussetzungen des Satzes II, also ach des Korollars II_2 erfüllen. Schreiben wir

$$x_m = a_m + \frac{z_m}{\sqrt{n}}, \qquad X = A + \frac{u}{\sqrt{n}},$$

')
$$\text{also} \qquad u = \sum_{m=1}^{k} m z_m,$$

) erhalten wir unter Verwendung von (8a):

")
$$\lim_{n=\infty} v_n\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) =$$
$$\sqrt{\frac{1}{(2\pi)^{k-1} a_1 a_2 \ldots a_k}} \int\int \ldots \int e^{-Q(z_1, z_2, \ldots, z_{k-1})} dz_1\, dz_2 \ldots dz_{k-2},$$

obei in der durch (7‴) definierten quadratischen Form Q die Variable $_{-1}$ durch die dritte Gleichung (9′) zu eliminieren ist, unter Beachtung on Gl. (6), die jetzt

‴)
$$\sum_{m=1}^{k} z_m = 0$$

gibt.

Ersetzt man die Variablen $z_1 \ldots z_{k-1}$ durch (neue) $x_1 \ldots x_{k-1}$ mit ilfe von

0)
$$(m - k) z_m = x_m,$$

so entsteht aus $(9''')$ und (6):

$$(10') \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} = u,$$

und die quadratische Form $(7''')$ geht über in

$$(10'') \qquad Q = \sum_{\iota,\varkappa} h_{\iota,\varkappa} z_\iota z_\varkappa = \sum_{\iota,\varkappa} \frac{h_{\iota,\varkappa}}{(\iota-k)(\varkappa-k)} x_\iota x_\varkappa \equiv \sum_{\iota,\varkappa} c_{\iota,\varkappa} x_\iota x_\varkappa,$$

womit die neuen Koeffizienten $c_{\iota,\varkappa}$ zufolge $(7'')$ definiert sind durch:

$$(10''') \quad c_{\iota,\varkappa} = \frac{1}{2a_k(\iota-k)(\varkappa-k)} \quad \text{für} \quad \iota \neq \varkappa; \qquad c_{\iota,\iota} = \frac{1}{2(\iota-k)^2}\left[\frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_\iota}\right]$$

Um das Integral $(9'')$ zu berechnen, muß man in den Ausdruck $(10')$ von Q für x_{k-1} den Wert $u - x_1 - \quad . - x_{k-2}$ einführen. Dadurch entsteht eine Funktion $F(x_1, x_2, \ldots, x_{k-2})$ zweiten Grades in den $x_1 \ldots x_{k-2}$, die man durch „Transformation auf Mittelpunkt" zerlegen kann in eine quadratische Form Q' in den $k-2$ Variablen $x_\iota - \alpha_\iota$ (wo die α_ι bestimmte Konstante) und ein von den Variablen $x_1 \ldots x_{k-2}$ freies Glied Q_0 gleich $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-2})$:

$$(11) \qquad Q = F(x_1, x_2, \ldots, x_{k-2}) = Q'(x_1, x_2, \ldots, x_{k-2}) + Q_0.$$

Die Konstante Q_0 ist geometrisch dadurch definiert, daß die Fläche zweiten Grades $Q = Q_0$ von der Ebene $(10')$ berührt werden muß. Hieraus ergibt sich leicht für Q_0 der Wert

$$(11') \qquad Q_0 = \frac{D}{D_1 + D_2 + \ldots + D_{k-1}} u^2,$$

wo D die Determinante $|c_{\iota\varkappa}|$ der quadratischen Form Q, D_m diejenige Determinante bedeutet, die aus $|c_{\iota\varkappa}|$ hervorgeht, wenn darin die m-te Spalte durch lauter 1er ersetzt wird. Für die durch $(10''')$ gegebenen Werte von $c_{\iota\varkappa}$ findet man:

$$(11'') \quad \frac{1}{D} = 2^{k-1}(k-1)!\,(k-1)!\,a_1 a_2 \ldots a_k, \qquad \frac{D_m}{D} = 2a_m(k-m)(A-m)$$

und daraus

$$(11''') \qquad u^2 = 2Q_0\left[\sum_{m=1}^{k} m^2 a_m - A^2\right] = 2Q_0 \sum_{m=1}^{k} (m-A)^2 a_m.$$

Da das Integral in $(9'')$ bis auf einen konstanten (von u unabhängigen) Faktor gleich e^{-Q_0} ist, hat man

$$(12) \qquad \lim_{n=\infty} v_n\left(\frac{u}{r_n}\right) = \frac{r_n}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \qquad \text{mit} \qquad r_n^2 = \frac{n}{2\sum_{m=1}^{k} (m-A)^2 a_m}.$$

Dies ist im wesentlichen das von Laplace angegebene Resultat, für s I. J. Bienaymé einen allgemeinen Beweisansatz gegeben hat[18]). Wir mmen auf die Bedeutung dieses Satzes und seiner Verallgemeinerung in 10, 4 zurück. Ohne weiteres erkennt man, daß, wenn die k verschiedenen ugelarten statt mit $1, 2, \ldots, k$, mit irgendwelchen Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_k$ wertet würden, nur in der Definition von A, X und r_n^2, Gl. (9) und 2) b_m an Stelle von m zu setzen wäre.

§ 10.

Der zweite Fundamentalsatz.

1. Abhängige Kollektivs. Zwei Kollektivs können in verschiedener eise so miteinander verknüpft sein, daß die Verteilung des einen eine nktion auch des zweiten Merkmales ist. In diesem Falle sagen wir, e Kollektivs seien voneinander *„abhängig"*. Bei der Definition der Verbindung" in § 8, 2 wurde ausdrücklich bemerkt, daß es sich um abhängige Kollektivs handelte; wir wollen jedoch die Definition jetzt ch auf abhängige ausdehnen. Ein einfaches *Beispiel* ist folgendes: In ner Urne mögen sich a weiße und b schwarze Kugeln befinden und es die übliche Annahme berechtigt, daß die Wahrscheinlichkeit eines weißen ges $a:(a+b)$ sei. Das erste Kollektiv, das wir hier betrachten, beeht aus den einzelnen Zügen aus der Urne, so daß seine Verteilung durch $(0) = a:(a+b)$; $\mathfrak{v}_1(1) = b:(a+b)$ gegeben ist. Das zweite Kollektiv stehe aus einer Reihe von Einzelzügen, die derart erfolgen, daß vor dem Zug jedesmal eine Kugel, durch einen Zug als Element des ersten ollektivs, aus der Urne entfernt wird. Gilt immer noch die Annahme, ß die Wahrscheinlichkeit der Anzahl der betreffenden Kugeln in der rne proportional ist, so haben wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_2(0) &= (a-1):(a+b-1) \quad \text{oder} \quad a:(a+b-1), \\ \mathfrak{v}_2(1) &= b:(a+b-1) \quad \text{oder} \quad (b-1):(a+b-1). \end{aligned}$$

Die ersten Werte gelten, wenn beim ersten Zug eine weiße, die eiten, wenn beim ersten Zug eine schwarze Kugel gezogen wurde. Nennen r x_1 das Merkmal des ersten Kollektivs ($x_1 = 0$ weiß, $x_1 = 1$ schwarz), das des zweiten, so ist die Verteilung V_2 Funktion von x_1 und x_2:

$$\begin{aligned} V_2 &= 0 \qquad (x_2 < 0) \\ V_2 &= 1 \qquad (1 \leqq x_2) \end{aligned}$$

$$V_2 = \frac{a-1}{a+b-1} \text{ bei } x_1 = 0, \quad V_2 = \frac{a}{a+b-1} \text{ bei } x_1 = 1, \quad (0 \leqq x_2 < 1).$$

[18]) Mém. d. savants étrangers, Paris, t. V, 1838, S. 513 und t. XV, 1858, S. 615.

Allgemein betrachten wir jetzt Verteilungen, die *von einem k-dimensionalen Parameter* $\bar{y}$ *abhängen*, wobei der Querstrich wieder bedeuten soll, daß $\bar{y}$ für eine Reihe von k skalaren Variablen als Symbol gesetzt ist. Unter $V(\bar{x}; \bar{y})$ wollen wir also eine Funktion verstehen, die für gewisse gegebene Werte (oder Wertsysteme) von $\bar{y}$, hinsichtlich $\bar{x}$ die Bedingungen des § 6, 4 erfüllt: nämlich in bezug auf jede Komponente von $\bar{x}$ monoton ansteigt, für $\bar{x} = -\infty$ den Wert null, für $\bar{x} = \infty$ den Wert 1 annimmt und überall gleich ihrem oberen Grenzwert ist. Ist der Parameter $\bar{y}$ einer Verteilung $V''(\bar{x}''; \bar{y})$ gegebene Funktion des Merkmales $\bar{x}'$ eines anderen Kollektivs, so sagen wir das erstgenannte Kollektiv sei von dem zweiten abhängig. Andrerseits sprechen wir von einer *Schar* von Kollektivs, indem wir alle Kollektivs, deren Verteilungen $V''(\bar{x}''; \bar{y})$ durch die verschiedenen möglichen Werte von $\bar{y}$ festgelegt werden, ins Auge fassen.

Die *Verbindung eines Kollektivs* mit einem von ihm *abhängigen* bzw. mit einer Schar von Kollektivs, erklären wir analog der Definition in § 7, 2 wie folgt. Es seien $e_1', e_2', \ldots$ die Elemente, $\bar{x}'$ das Merkmal, $V'(\bar{x}')$ die Verteilung des ersten Kollektivs. Jedem Wert von $\bar{x}'$ ist eindeutig ein Wert des Parameters $\bar{y}$ zugeordnet, der in der Verteilung $V''(\bar{x}''; \bar{y})$ einer Schar von Kollektivs auftritt. Diese Schar habe die Elemente $e_1'', e_2'', \ldots$, deren Merkmale die Werte von $\bar{x}''$ sind. Jedes Element $e_\varkappa$ der Verbindung sei eine Kombination eines $e_\varkappa'$ mit einem e_λ'', wobei das letztere aus jener Elementfolge (der Schar von Elementfolgen) entnommen ist, deren $\bar{y}$-Wert dem $\bar{x}'$-Wert des betreffenden e' entspricht. Merkmal von e sei die Zusammenfassung von $\bar{x}'$ und $\bar{x}''$. Die Verteilung $V(\bar{x})$, wo $\bar{x}$ die Zusammenfassung von $\bar{x}'$ und $\bar{x}''$ bezeichnet, ist dann

$$V(\bar{x}) = \int^{\bar{x}'} V''(\bar{x}''; \bar{\eta}') \cdot d\, V'(\bar{\xi}'), \tag{2}$$

wenn $\bar{\eta}'$ der dem $\bar{\xi}'$ zugeordnete Wert von $\bar{y}$ ist. Aus (2) folgt im Falle der Unabhängigkeit, d. h. wenn V'' die zweite Variable nicht enthält, der speziellere Ansatz (6) von § 7. Sind die gegebenen Verteilungen „*geometrisch*“ und die Wahrscheinlichkeitsdichten $v'(\bar{x}')$ und $v''(\bar{x}; \bar{y})$, so folgt aus (2):

$$v(\bar{x}) = v''(\bar{x}''; \bar{y}')\, v'(\bar{x}'). \tag{2'}$$

Sind die V' und V'' *arithmetisch*, so hat man analog:

$$\mathfrak{v}(\bar{x}) = \mathfrak{v}''(\bar{x}''; \bar{y}')\, \mathfrak{v}'(\bar{x}'). \tag{2''}$$

Beide Male bezeichnet $\bar{y}'$ den dem $\bar{x}'$ zugehörigen Wert von $\bar{y}$. In der üblichen Ausdrucksweise lautet (2''), wie bekannt, so: Die Wahrscheinlichkeit eines aus der Verbindung zweier abhängiger Ereignisse bestehenden Ereignisses ist das Produkt aus der Wahrscheinlichkeit des

ten mal der des zweiten, wobei diese unter der Annahme, daß das te eingetroffen sei, berechnet werden muß[19]).

Auf die nähere Erörterung dieser Definitionen und Behauptungen, mentlich auf ihre Anwendbarkeit bei empirischen Beobachtungsreihen, hen wir hier nicht ein.

2. Kreuzung von Kollektivs. Unter der *Kreuzung von n Kollektivs* mit $k_1, k_2, \ldots, k_n$-dimensionalem Merkmal, die alle von einem einzigen k-dimensionalen Kollektiv abhängen, *mit diesem* verstehen wir die *Zusammensetzung aus der Verbindung der* $n+1$ *Kollektivs* (durch welche ein $k + k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ dimensionales entsteht) und einer *darauf folgenden Teilung*, die nur das k-dimensionale Merkmal übrig läßt. Nehmen wir, um uns einfacher ausdrücken zu können, zunächst an, sämtliche Verteilungen seien arithmetisch und durch die Einzelwahrscheinlichkeiten $\mathfrak{v}(\bar{x})$, $\mathfrak{v}_1(\bar{x}_1; \bar{y}_1)$, $\mathfrak{v}_2(\bar{x}_2; \bar{y}_2), \ldots, \mathfrak{v}_n(\bar{x}_n; \bar{y}_n)$ gegeben, so bedeutet die Einzelwahrscheinlichkeit $\mathfrak{v}_n(\bar{x})$ der Kreuzung, wo die $\bar{y}_\varkappa$ gegebene Funktionen von $\bar{x}$ sind:

$$\bar{y}_\varkappa = \bar{y}_\varkappa(\bar{x})$$

Folgendes: Die Wahrscheinlichkeiten $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \ldots, \mathfrak{v}_n$ dafür, bei n verschiedenen Ziehungen die Ergebnisse $\bar{x}_1$, bzw. $\bar{x}_2 \ldots \bar{x}_k$ zu erhalten, hängen von einer einzigen Variablen $\bar{x}$, oder von einer „Ursache" $\bar{x}$ ab, für welche eine „*a priori*-Wahrscheinlichkeit" $\mathfrak{v}(\bar{x})$ gegeben ist. Man fragt nach der „*a posteriori-Wahrscheinlichkeit*" $\mathfrak{w}_n(\bar{x})$ *der Ursache* $\bar{x}$, *gestützt auf bestimmte Ziehungsergebnisse*, die in einem gegebenen Wertsystem der $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ zum Ausdruck kommen. Es wird nach (2″) mit Rücksicht auf (1) in § 8:

$$\mathfrak{w}_n(\bar{x}) = \text{konst.}\, \mathfrak{v}(\bar{x})\, \mathfrak{v}_1(\bar{x}_1; \bar{y}_1[\bar{x}])\, \mathfrak{v}_2(\bar{x}_2; \bar{y}_2[\bar{x}]) \ldots \mathfrak{v}_n(\bar{x}_n; \bar{y}_n[\bar{x}]),$$

wobei man für $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ die gegebenen Werte einzusetzen und die Konst. aus der Bedingung zu bestimmen hat, daß die über alle möglichen $\bar{x}$-Werte erstreckte Summe der $\mathfrak{w}_n(\bar{x})$ gleich 1 wird.

Im allgemeinen Fall *beliebiger Verteilungen* $V(\bar{x})$, $V_1(\bar{x}_1; \bar{y}_1)$, $V_2(\bar{x}_2; \bar{y}_2), \ldots, V_n(\bar{x}_n; \bar{y}_n)$ muß für jeden der n Merkmalräume der Verteilungen V_1 bis V_n ein Raumteil $R_1, R_2, \ldots, R_n$ vorgegeben sein, für den eine „Teilung" oder „Aussonderung" zu bilden ist. Setzen wir das über $R_\varkappa$ erstreckte Integral von $dV_\varkappa$:

$$\int_{(R_\varkappa)} dV_\varkappa(\bar{x}_\varkappa; \bar{y}_\varkappa) = f_\varkappa(\bar{y}_\varkappa), \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n),$$

[19]) Vgl. z. B. A. Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Dtsch. v. H. Liebmann, Leipzig 1912, S. 12.

wo bei der Integration $\bar{y}_\varkappa$ festzuhalten ist, so wird die gesuchte Verteilun

$$W_n(\bar{x}) = \text{konst.} \int^{\bar{x}} f_1(\bar{\eta}_1) \cdot f_2(\bar{\eta}_2) \dots f_n(\bar{\eta}_n)\, dV(\bar{\xi}), \tag{4}$$

die Integration erstreckt über alle $\bar{\xi}$, für welche $\xi^{(\iota)} \leqq x^{(\iota)}$. Dabei b deutet $\bar{\eta}_\varkappa$ den nach (3) zu $\bar{x} = \bar{\xi}$ gehörige Wert von $\bar{y}_\varkappa$. In dem ob erwähnten Fall arithmetischer Verteilungen war angenommen, daß jed $R_\varkappa$ nur *einen* Gitterpunkt des betreffenden Merkmalraumes einschließt.

In dieser Festlegung der „Kreuzung" als einer speziellen, zusamme gesetzten Operation, durch die ein neues Kollektiv aus gegebenen abgeleit wird, liegt ein wesentlicher Unterschied zwischen unserer Grundlegung d Wahrscheinlichkeitsrechnung und der sonst üblichen Auffassung, in der d Wahrscheinlichkeit „der Ursachen" od. dgl. ein ganz beso..leres, auf *ande Erfahrungs- und Erkenntnisquellen* zurückgehendes Kapitel der Wah scheinlichkeitsrechnung bildet. Doch soll hier auch darauf nicht weit eingegangen werden.

Wenn die durch (3) dargestellten Abhängigkeiten durchaus *linear* sin

$$\bar{y}_\varkappa = \bar{c}_\varkappa + h_\varkappa \bar{x} \tag{4'}$$

nennen wir die *Kreuzung* eine *„lineare"*. Auch hier könnte man an Stel der skalaren Größe $h_\varkappa$ eine Matrix gesetzt denken.

3. Der zweite Fundamentalsatz. Der zweite Fundamentalsa der Wahrscheinlichkeitsrechnung enthält eine allgemeine Aussage über d Verteilung $W_n(\bar{x})$, zu der im Limes für $n = \infty$ die fortgesetzte linea Kreuzung von n Kollektivs mit einem, von dem sie alle abhängen, führ vorausgesetzt, daß alle Abhängigkeiten an *derselben* Stelle ihre Extren werte erreichen. Um den Satz kurz aussprechen zu können, führen w den Begriff der „für die Kreuzung normalen Verteilungen" und ein „gleichmäßigen Folge" solcher Verteilungen ein.

Eine von einem Parameter $\bar{y}$ abhängige Verteilung $V_\varkappa(\bar{x}; \bar{y})$ soll a *für die Kreuzung normal* bezeichnet werden, wenn für einen Raumte $R_\varkappa$ im $\bar{x}$-Raum, für den

$$\int_{(R_\varkappa)} dV_\varkappa(\bar{x}; \bar{y}) = f_\varkappa(\bar{y}) \tag{5}$$

nicht verschwindet, diese Funktion folgende Eigenschaften aufweist:

1. An einer im Endlichen gelegenen Stelle $\bar{y} = \bar{a}_\varkappa$ besitzt $f_\varkappa$ e endliches Maximum vom Betrage $A_\varkappa$ und endliche Abteilungen der dr ersten Ordnungen (unter denen die der ersten Ordnung verschwinden, d der zweiten eine nicht positive quadratische Form mit den Koeffiziente $-2 s_\varkappa^{(\iota,\lambda)}$ bestimmen).

2. Außerhalb der Stelle $\bar{y} = \bar{a}_\varkappa$ bleibt $f_\varkappa$ unterhalb $A_\varkappa$ (d. h. für $|\bar{y} - \bar{a}_\varkappa| > \varepsilon$ ist $A_\varkappa - f_\varkappa > \delta_\varkappa$, wo $\delta_\varkappa > 0$ nur von ε abhängt) und im Unendlichen verschwindet $f_\varkappa$ mit einer positiven Potenz $\alpha_\varkappa$ von $|\bar{y}|$.

Eine unendliche Folge derartiger Verteilungen derselben Dimension heißen *gleichmäßig* heißen, wenn folgendes zutrifft:

1. Die Folge der Komponenten von $\bar{a}_\varkappa$, der $A_\varkappa$ sowie aller Ableitungen der $f_\varkappa$ an der Stelle $\bar{y} = \bar{a}_\varkappa$ bis zur dritten Ordnung einschließlich, beschränkt; die Folge der aus den negativ genommenen zweiten Ableitungen gebildeten quadratischen Formen $\sum_{k=1}^{n} s_\varkappa^{(\iota,\lambda)} y^{(\iota)} y^{(\lambda)}$ hat eine von Null verschiedene untere Schranke für jedes $\bar{y} \neq 0$.

2. Unter den positiven Zahlen $\delta_\varkappa$ und $\alpha_\varkappa$ gibt es je einen von null verschiedenen Kleinstwert δ bzw. α.

Unter Verwendung dieser Bezeichnungen läßt sich der *zweite Fundamentalsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung* wie folgt aussprechen:

Die fortgesetzte lineare Kreuzung unendlich vieler Kollektivs, deren Verteilungen eine gleichmäßige Folge für die Kreuzung normaler Verteilungen bilden, mit einem beliebigen k-dimensionalen Kollektiv von stetiger Verteilungsdichte, bei konstanten, oder wenigstens in endlichen Grenzen liegenden Verhältnissen $h_1 : h_2 : h_3 : \ldots$ in Gleichung (4′) und einem für alle $\varkappa$ gleichen Wert der Differenz $c_\varkappa - \bar{a}_\varkappa$, führt auf das Gaußsche Gesetz: Es läßt sich stets eine von n abhängige Koordinatentransformation im k-dimensionalen Raum von $\bar{x}$ in $\bar{u}$ (Verschiebung des Anfangspunktes um $\bar{c}_\varkappa - \bar{a}_\varkappa$, Drehung der Achsen und Veränderung der Maßstäbe) *angeben, so daß die Wahrscheinlichkeitsdichte $w_n(\bar{x})$ der n-ten Kreuzung im Limes für $n = \infty$ proportional $e^{-u_1^2 - u_2^2 - \ldots - u_k^2}$ und die Verteilung selbst gleich dem Produkte $\Phi(u_1) \cdot \Phi(u_2) \ldots \Phi(u_k)$ wird, wo $\Phi(u)$ die Gaußsche Funktion $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int^{u} e^{-x^2} dx$.*

Der Beweis dieses Satzes für den Fall $k = 1$ und die Annahme $h_1 = h_2 = \ldots = h_n$ wird unmittelbar durch die in § 1 gegebenen Beweise für die Behauptungen I und II gedeckt. Die Voraussetzungen, die in der Festlegung der „für die Kreuzung normalen“ Verteilungen und ihrer „gleichmäßigen“ Folgen eingeschlossen sind, stimmen im wesentlichen mit den in § 1, 2 gegebenen überein: Daß das Maximum von $f_\varkappa$ nicht eins, sondern gleich $A_\varkappa$ angenommen wurde, ändert nichts, da bei der „Teilung“ der Kollektivs der Faktor herausfällt. Statt der Voraussetzung (a 2) bzw. (b 2) von § 1 haben wir jetzt der Einfachheit halber die Existenz bzw. Beschränktheit der dritten Ableitungen gefordert, was nur etwas strenger ist.

Die Ausdehnung auf mehrdimensionale Fälle ist in § 2, 4 behandelt, d naheliegende Erweiterung durch Einführung der untereinander verschiedene Multiplikatoren $h_\varkappa$ in § 6, 5 erwähnt worden. Die $\bar{c}_\varkappa$ in Gleichung (4 fallen aus der Rechnung völlig heraus, wenn man von vornherein statt $\bar{y}$ die Variable $\bar{y}_\varkappa + \bar{c}_\varkappa - \bar{a}_\varkappa$ einführt.

4. Anwendungen. Zweiter Satz der Fehlertheorie. Als An wendungen des zweiten Fundamentalsatzes können vor allem die im voran gegangenen Paragraphen behandelten Probleme gelten. Der eindimensionale Bayessche Fall ist in der Weise aufzufassen, daß kleine Gruppen, etwa von n' Ziehungen, das Element eines Kollektivs bilden; das zugehörige Merkmal ist die Häufigkeit a_1 der gezogenen weißen Kugeln, Parameter die Wahr scheinlichkeit x eines weißen Einzelzuges. Die Funktionen $f_1, f_2, \ldots$ sind alle untereinander gleich und im Bereiche $0 < x < 1$ durch $[x^{a_1}(1-x)^{a_2}]$ definiert. Die ganze weitere Rechnung zeigt nur eine unbedeutende Änderung gegen die in § 9, 1 durchgeführte. Für die Sache selbst ist es wesentlich, daß bei den aufeinanderfolgenden Gruppen von Ziehungen die relative Häufigkeit a_1 konstant bleibt. Dagegen ist der Fundamentalsatz ohne weiteres anwendbar und führt zu dem gleichen Ergebnis, wenn der Umfang der Gruppen *beliebig in endlichen Grenzen wechselt*, da man ja immer Funktionen f bekommt, die den Voraussetzungen genügen und an derselben Stelle $x = a_1$ ihr Maximum haben. Die Erweiterung bzw. Präzisierung des Bayes-Laplaceschen Theorems, zu der unsere Untersuchungen uns instand setzen, erstreckt sich somit nach folgenden drei Richtungen: Ausdehnung auf *mehrere Dimensionen* und damit Zurückführung des Laplace-Bienaymé schen Satzes auf ein allgemeineres Theorem, Zulässigkeit *beliebiger a priori-Wahrscheinlichkeit*, endlich Festlegung des einzig wesentlichen Kriteriums, daß nämlich im Verlaufe der unbeschränkt fortgesetzten Ziehungen *immer wieder Gruppen mit der gegebenen oder angenommenen Häufigkeitsverteilung* $a_1, a_2, \ldots$ auftreten.

Wie der erste Fundamentalsatz zu dem für die *Gaußsche Fehlertheorie* grundlegenden Satz führte, daß die Wahrscheinlichkeit eines als Summe sehr vieler Elementarfehler sich bildenden Fehlers dem Exponentialgesetz genügt, so liefert der zweite ein Resultat, das für die Anwendung der Fehlertheorie unentbehrlich ist, und von dem man stets — allerdings meist unter Verzicht auf jede Beweisführung — Gebrauch macht. Die Frage liegt wie folgt. Man hat eine Gruppe von n' Beobachtungen für eine unbekannte Größe durchgeführt; $a_1 n'$ ergaben den Wert b_1, $a_2 n'$ den Wert $b_2 \ldots$, $a_k n'$ den Wert b_k; *gefragt wird nach der Wahrscheinlichkeit dafür, daß der „wahre" Wert der Unbekannten bei x liegt.* Wie immer das Fehlergesetz angenommen wird, es gibt gewisse Wahrscheinlichkeiten $x_1, x_2, \ldots, x_k$ für das Auftreten der einzelnen Beobachtungsresultate

$b_2, \ldots, b_k$, und wenn wir den „wahren" Wert x mit dem Mittelwert

$\sum_1 x_m b_m$ der durch die x_m bestimmten (arithmetischen) Verteilung iden-

zieren, haben wir fast genau die in § 9, 4 behandelte Aufgabe. Setzen wir

$$A = \sum_{m=1}^{k} a_m b_m, \qquad s^2 = \sum_{m=1}^{k} a_m (b_m - A)^2,$$

wird die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, daß der wahre Wert bei x
gt, falls die Gruppe von n' Versuchen hinreichend oft wiederholt wird,
mptotisch gleich

$$v_n(x) \sim \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-A)^2}{2s^2}}.$$

nn dies ist nichts anderes als Gleichung (12) von § 9, mit der Be-
chnung (6) und der am Schluß von § 9, 4 erwähnten Ergänzung, in
stalt einer *Näherungsformel* geschrieben. Ebenso wie im einfachen
yesschen Fall kann man von diesem Ergebnis immer dann Gebrauch
chen, wenn eine große Zahl n von Einzelbeobachtungen vorliegt. Wie
n sich diese in Gruppen von n' Beobachtungen geteilt denkt, ist gleich-
tig, wenn man nur annimmt, daß in jeder Gruppe die gleichen Häufig-
ten $a_1, a_2, \ldots, a_k$ auftreten.

In der Regel sucht man in der Fehlertheorie das Resultat (6′) da-
rch zu gewinnen, daß man schon von dem Fehlergesetz $e^{-h^2x^2}$ ausgeht.
f diese Weise erhält man wohl durch eine ganz einfache Überlegung
v_n den Ausdruck

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-A)^2},$$

r daß und wie hier das „Präzisionsmaß" h durch die aus den Beob-
tungen abgeleitete Streuungsgröße s^2 zu bestimmen ist, bleibt eine
z *willkürliche* Annahme. Erst die Anwendung des zweiten Fundamental-
zes führt zu dem *zweiten*, entscheidenden *Satz der Fehlertheorie*:

*Die aus einer großen Zahl von Beobachtungen zu folgernde Wahr-
einlichkeit des „wahren" Wertes x wird durch das Gaußsche Gesetz* (6′)
*gestellt, wobei A den Mittelwert und s^2 die Streuung der Beobachtungs-
ebnisse bedeutet.*

5. Das zweite Gesetz der großen Zahl. Wie in § 8, 6 als ein
lergebnis der Untersuchungen, die zum ersten Fundamentalsatz führten,
bekannte Gesetz der großen Zahl gewonnen wurde, so können wir
t — ebenfalls unter Beschränkung auf ganz einfache Überlegungen —

ein vollkommen *analoges Gesetz über die fortgesetzte lineare Kreuzun* von Kollektivs aussprechen.

Gehen wir etwa von der asymptotisch richtigen Näherungsformel (4 in § 9 aus und führen wir dabei den Wert r_n aus (3″), § 9 teilwei wieder ein, so haben wir als Aussage des Laplace-Bayesschen Satze

$$(7) \qquad w_n(x) \sim \frac{r_n}{\sqrt{\pi}} e^{-r_n^2 (x-a)^2} = \frac{r_n}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{n(x-a)^2}{2a(1-a)}}.$$

Hier ist charakteristisch, daß der Faktor von $(x-a)^2$ im Exponente mit n ins Unendliche wächst, ganz so wie in Gleichung (9) oder (9′) v § 8 bei der Durchschnittsbildung. Es folgt aus (7), daß das von $a-$ bis $a+\varepsilon$ erstreckte Integral von $w_n(x)$ bei beliebigem festem ε m wachsendem n *gegen* 1 *gehen muß*, d. h. aber nichts anderes, als daß d Streuung der durch $w_n(x)$ dargestellten Verteilung unter jeden Betra sinkt (§ 8, 6). Nun ist leicht zu sehen, daß dies ganz allgemein für jed Kreuzung von sehr vielen Verteilungen (mit gleicher Scheitelstelle) gelten mu wenn man wesentlich nur voraussetzt, daß die *Summe der zweiten Ableitunge* in den Scheitelpunkten mit n ins (negativ) *Unendliche* geht. Denn d zweite Fundamentalsatz beruht auf den im I. Teil dieser Arbeit bewiesene Behauptungen I und II. Es ist aber in § 1, 6 ausdrücklich gezeigt, da das Integral des Produktes $p_n(u)$ von n Funktionen für feste, endlich Grenzen von u gebildet, mit wachsendem n gegen $\sqrt{\pi}$ geht, während d Beitrag zum Integral, den die außerhalb liegenden u-Werte liefern, unt jeden Betrag sinkt. Da nun die Variable u sich wesentlich durch de Faktor r_n, gleich der Quadratwurzel aus der halben negativen Summe d zweiten Ableitungen, von $x-a$ unterscheidet, erkennt man, daß in alle Fällen, in denen die Behauptung II anwendbar ist, $w_n(x)$ die behaupte Eigenschaft besitzt. Wir haben so den folgenden, als *zweites Gesetz d großen Zahl* zu bezeichnenden Satz:

Die fortgesetzte lineare Kreuzung von n abhängigen Kollektivs m gleicher Scheitelstelle, für welche die Summe der zweiten Ableitungen na dem Parameter an der Scheitelstelle ins Unendliche geht, führt zu Ve teilungen mit unbeschränkt abnehmender Streuung.

Wollte man sich völlig dem Gedankengang von § 8, 6 anschließen, müßte man davon ausgehen, daß (§ 1, 3) die zweite Ableitung von $p_n($ an der Scheitelstelle konstant -2 ist, daß daher die von $w_n(x)$, da s sich um den Faktor r_n^2 unterscheidet, negativ unendlich wird. Dann ka man weiter schließen, daß auch die Werte von $w_n(x)$ in endlicher Un gebung des Scheitels — höchstens bis auf Punkte, die eine Nullmen bilden — gegen null gehen usf. In der üblichen Ausdrucksweise der Wah

einlichkeitsrechnung wäre das *zweite Gesetz der großen Zahl* etwa so zusprechen:

Die aus einer großen Zahl n von Beobachtungen erschlossene Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine beobachtete Größe um höchstens ε von ihrem hrscheinlichsten Wert abweicht, geht bei festem, beliebig kleinem ε, r unbeschränkt wachsendem n, gegen 1.

Dieser Satz, wenn er auch nicht ausdrücklich formuliert, geschweige n bewiesen wurde, ist seinem wesentlichen Inhalt nach der heutigen hrscheinlichkeitsrechnung doch nicht ganz fremd. Es gilt, wie man ht sieht, mit fast unverändertem Ausdruck für den Fall mehrdimenaler Verteilungen.

(Eingegangen am 31. August 1918.)

Zur Verteilung der fortsetzbaren Potenzreihen.

Von

Felix Hausdorff in Greifswald.

Daß die über ihren Konvergenzkreis hinaus fortsetzbaren Potenzreihe die Ausnahme, die nichtfortsetzbaren die Regel bilden, ist eine häufig aus gesprochene Ansicht, der aber erst Herr Pólya[1]) eine präzise Bedeutun gegeben hat, indem er, unter geeigneten mengentheoretischen Festsetzunge über den „Raum" der Potenzreihen mit dem Konvergenzradius 1, den Sat bewies: *Die Menge der fortsetzbaren Potenzreihen ist perfekt und nirgend dicht, die der nichtfortsetzbaren hat nur innere Punkte und ist überall dicht.* Als schwierigster und die meisten Hilfsmittel erfordernder Te dieses Satzes erscheint bei Pólya die Behauptung[2]), daß die Menge de fortsetzbaren Potenzreihen in sich dicht ist; hierfür gebe ich in § 1 eine ganz elementaren Beweis. In § 2 zeige ich, daß in gewissen Klassen vo Potenzreihen die fortsetzbaren eine höchstens abzählbare Menge bilden: ei Resultat, das in seiner Art also wieder die oben erwähnte Ansicht bestätig

§ 1.

Es sei zunächst ganz kurz an die zugrunde liegenden, von der zitierte Arbeit etwas abweichenden mengentheoretischen Festsetzungen[3]) erinnert Als Elemente („Punkte") figurieren die Potenzreihen

$$A = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

mit dem Konvergenzradius 1, wobei jedoch A und B dann und nur dan denselben Punkt bedeuten sollen, wenn $A - B$ einen Konvergenzradius $>$ hat; wenn wir diese Relation etwa als *Äquivalenz* bezeichnen, so wird als

[1]) G. Pólya, Über die Potenzreihen, deren Konvergenzkreis natürliche Grenz ist, Acta math. 41 (1917), S. 99–118.

[2]) G. Pólya, loc. cit. [1]), Satz III, S. 110–117.

[3]) Sie stammen ebenfalls von Herrn Pólya, der sie mir brieflich mitgeteilt ha

er Klasse äquivalenter Potenzreihen ein einziger Punkt zugeordnet. *Um-ung* einer Potenzreihe A heißt die Gesamtheit der Potenzreihen B mit

$$\overline{\lim} \frac{|b_n - a_n|}{\varepsilon_n} \leqq 1,$$

$(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots)$ eine Folge positiver Zahlen mit

$$\varepsilon_n^{\frac{1}{n}} \to 1$$

man erkennt, daß hierin A und B durch äquivalente Potenzreihen etzt werden können, daß es sich also um eine Relation zwischen Punkten ndelt. Wir wollen nun den Satz beweisen:

Die Menge der fortsetzbaren Potenzreihen hat keinen isolierten Punkt. h. in jeder Umgebung $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots)$ einer fortsetzbaren Potenzreihe A gt eine mit A nicht äquivalente fortsetzbare Potenzreihe B. Das be-t auf dem

Hilfssatz: *Sei* $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n^{\frac{1}{n}} \to 1$. *Dann gibt es eine Potenzreihe* $= \Sigma c_n x^n$ *mit* $|c_n| \leqq \varepsilon_n$, *die den Einheitskreis zum Konvergenzkreis l auf ihm nur den singulären Punkt* $x = 1$ *hat.*

Sei $\gamma_n = \min(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, also $\gamma_n > 0$, $\gamma_0 \geqq \gamma_1 \geqq \ldots$, so daß $= \lim \gamma_n \geqq 0$ existiert. Wir behaupten, daß auch $\gamma_n^{\frac{1}{n}} \to 1$. Denn *ent-der* ist $\gamma > 0$, und $\gamma_n^{\frac{1}{n}}$ liegt zwischen den Grenzen $\gamma_0^{\frac{1}{n}}$ und $\gamma^{\frac{1}{n}}$, die für $\to \infty$ nach 1 konvergieren. *Oder* es ist $\gamma = 0$; dann ist $\gamma_n = \varepsilon_\nu$, wo $\leqq n$) von n abhängt und mit n unbegrenzt wächst, und da schließlich < 1, so folgt

$$1 > \gamma_n^{\frac{1}{n}} = \varepsilon_\nu^{\frac{1}{n}} \geqq \varepsilon_\nu^{\frac{1}{\nu}} \to 1,$$

o auch in diesem Falle $\gamma_n^{\frac{1}{n}} \to 1$. Die Potenzreihe $\sum \gamma_n y^n$ hat demnach Konvergenzradius 1, und da die Koeffizienten positiv sind, so ist be-ntlich der Punkt $y = 1$ sicher singulär. Ist nun ϱ eine positive Zahl, ist die Funktion

$$C(x) = \frac{1}{1+\varrho} \sum \gamma_n \left(\frac{x+\varrho}{1+\varrho}\right)^n$$

ulär im Kreise $\left|\frac{x+\varrho}{1+\varrho}\right| < 1$, dessen Peripherie den Einheitskreis ein-ließt und nur im Punkte $x = 1$ berührt, und für $x = 1$ gewiß singulär; . $C(x)$ ist für $|x| \leqq 1$ bis auf $x = 1$ regulär. Ferner ist für $|x| < 1$

$$C(x) = \sum c_m x^m,$$

$$c_m = \sum_n \gamma_n \binom{n}{m} \frac{\varrho^{n-m}}{(1+\varrho)^{n+1}} \qquad (n \geqq m)$$

und wegen $\gamma_m \geqq \gamma_{m+1} \geqq \cdots$

$$c_m \leqq \gamma_m \sum_n \binom{n}{m} \frac{\varrho^{n-m}}{(1+\varrho)^{n+1}} = \gamma_m$$

Also $0 < c_m \leqq \gamma_m \leqq \varepsilon_m$, $C(x)$ erfüllt die Forderungen des Hilfssatzes.

Offenbar kann man auch verlangen, daß C als einzigen singulären Punkt statt $x = 1$ einen beliebigen Punkt des Einheitskreises haben soll.

Ist nun A eine fortsetzbare Potenzreihe mit dem Konvergenzradius so wähle man C dem Hilfssatz entsprechend so, daß ihr einziger singulärer Punkt in einen regulären Punkt von A fällt. Dort ist dann auch $B = A +$ singulär; B hat also den Konvergenzradius 1, ist aber fortsetzbar, da alle übrigen für A regulären Punkte des Einheitskreises auch für C regulär sind. B gehört der Umgebung $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots)$ von A an und ist mit A nicht äquivalent, w. z. b. w.

Dieselbe Methode (A nicht fortsetzbar, C dem Hilfssatz entsprechend, $B = A + C$ nichtfortsetzbar) zeigt auch, daß die Menge der nichtfortsetzbaren Reihen keinen isolierten Punkt hat, was aber weniger besagt als Pólyas Sätze I, II (S. 105, 107), daß diese Menge überall dicht ist und nur innere Punkte hat.

§ 2.

Satz I. *Es sei (für $n = 0, 1, 2, \ldots$) A_n eine Menge komplexer Zahlen, von denen je zwei verschiedene eine Differenz vom Betrage $\geqq \delta_n > 0$ haben, und es sei $\delta_n^{\frac{1}{n}} \to 1$. Es sei ferner G_x ein das Innere des Einheitskreises umfassendes, aber darüber hinausragendes Gebiet. Dann gibt es höchstens abzählbar viele Potenzreihen*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \tag{1}$$

die in G_x eindeutig-regulär sind und Koeffizienten a_n aus A_n haben.

Beweis. Es sei E_x das Innere des Einheitskreises ($|x| < 1$); G_x kann, indem man es durch ein Teilgebiet ersetzt, als beschränkt und einfach zusammenhängend angenommen werden. Es sei sodann

$$y = \varphi(x), \qquad x = \psi(y)$$

die konform-schlichte Abbildung von G_x auf E_y ($|y| < 1$), bei der die Nullpunkte $x = 0$, $y = 0$ und die Richtungen der positiven reellen Achse einander entsprechen; es ist also $\varphi(x)$ in G_x, $\psi(y)$ in E_y regulär und in E_x

$$\varphi(x) = \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \ldots \qquad (\lambda_1 > 0$$

Hierbei ist bekanntlich $\lambda_1 < 1$; denn das Bild von $E_x < G_x$ ist ei

iet $< E_y$ mit einem Flächeninhalt $\mu < \pi$; das Bild des Kreisinnern $< \xi < 1$ hat den Flächeninhalt

$$\mu(\xi) = \pi \cdot \sum m |\lambda_m|^2 \xi^{2m} < \mu,$$

aus die Konvergenz der Reihe $\mu(1)$ und

$$\mu = \lim_{\xi \to 1} \mu(\xi) = \mu(1),$$

$$\sum m |\lambda_m|^2 = \frac{\mu}{\pi} < 1$$

t.

Jeder in G_x regulären Funktion $f(x)$ entspricht eine in E_y reguläre ıktion

$$g(y) = f(\psi(y)) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \dots$$

umgekehrt jeder in E_y regulären Funktion $g(y)$ eine in G_x reguläre

$$f(x) = g(\varphi(x)) = b_0 + b_1 \varphi(x) + b_2 \varphi(x)^2 + \dots,$$

in E_x die Reihenentwicklung hat

$$f(x) = b_0 + b_1 (\lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots) + b_2 (\lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots)^2 + \dots$$
$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

ei

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = b_0, \\ a_1 = b_1 \lambda_1, \\ a_2 = b_1 \lambda_2 + b_2 \lambda_1^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n = (b_1, \dots, b_{n-1}) + b_n \lambda_1^n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

$, \dots, b_{n-1})$ bedeutet eine lineare homogene Funktion dieser Größen Koeffizienten, die von den λ_m abhängen. Nennen wir $\mathfrak{F}$ die Menge in G_x regulären $f(x)$, deren Koeffizienten a_n den Mengen A_n angehören, die Menge der entsprechenden in E_y regulären $g(y)$.

Wir wählen nun η fest zwischen λ_1 und 1 $(\lambda_1 < \eta < 1)$. Da $g(\eta)$ $\sum b_n \eta^n$ konvergiert, ist schließlich $|b_n| \eta^n < \frac{1}{2}$; es sei $\mathfrak{G}_p$ die Menge der ıktionen $g(y)$ aus $\mathfrak{G}$, die diese Ungleichung für $n \geqq p$ erfüllen, und die Menge der entsprechenden $f(x)$. Andererseits ist schließlich (für $\geqq \nu$) $\delta_n^{\frac{1}{n}} \geqq \frac{\lambda_1}{\eta}$, $\delta_n \geqq \left(\frac{\lambda_1}{\eta}\right)^n$. Betrachten wir, für $n \geqq p \geqq \nu$, zwei Funkıen $g(y)$, $\bar{g}(y)$ aus $\mathfrak{G}_p$, die überdies dieselben Anfangskoeffizienten $b_1, \dots, b_{n-1}$ haben; wir behaupten, daß sie dann auch den nächsten effizienten gemein haben. Denn aus (3) folgt

$$\bar{a}_n - a_n = (\bar{b}_n - b_n) \lambda_1^n$$

und hier ist die rechte Seite dem Betrage nach $< \left(\frac{\lambda_1}{\eta}\right)^n$, während di linke, falls $\bar{a}_n$ von a_n verschieden wäre, dem Betrage nach $\geqq \delta_n \geqq \left(\frac{\lambda_1}{\eta}\right)$ sein müßte. Also muß $\bar{a}_n = a_n$, $\bar{b}_n = b_n$ sein. Wendet man diesen Schlu auf $n = p, p+1, p+2, \ldots$ an, so ergibt sich, daß zwei Funktionen au $\mathfrak{G}_p (p \geqq \nu)$, die in den Anfangskoeffizienten $b_0, b_1, \ldots, b_{p-1}$ übereinstimmen auch alle weiteren Koeffizienten gemein haben, d. h. identisch sind; ein Funktion $g(y)$ aus $\mathfrak{G}_p$ ist, für $p \geqq \nu$, durch ihre ersten Koeffiziente $b_0, b_1, \ldots, b_{p-1}$ oder eine Funktion $f(x)$ aus $\mathfrak{F}_p$ durch ihre ersten Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ eindeutig bestimmt. Da A_n als isolierte Meng höchstens abzählbar ist, so gibt es höchstens abzählbar viele Komplex $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$, also höchstens abzählbar viele Funktionen in $\mathfrak{F}_p$ (fü $p \geqq \nu$, aber auch für $p < \nu$, da $\mathfrak{F}_0 \leqq \mathfrak{F}_1 \leqq \mathfrak{F}_2 \leqq \ldots$), und $\mathfrak{F}$ ist als Summ aller $\mathfrak{F}_p$ ebenfalls höchstens abzählbar.

Satz II: *Es sei A_n eine Menge komplexer Zahlen, von denen je zwe verschiedene eine Differenz vom Betrage $\geqq \delta_n > 0$ haben, und $\delta_n^{\frac{1}{n}} \to 1$. Dann gibt es höchstens abzählbar viele Potenzreihen*

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

die im Einheitskreise $|x| < 1$ regulär und darüber hinaus fortsetzbar sind und Koeffizienten a_n aus A_n haben.

Denn jedes $f(x)$ dieser Art ist in einem Gebiet G_x regulär, das durch Vereinigung des Einheitskreises $|x| < 1$ mit einem Kreise $|x - \alpha| < \frac{1}{k}$ entsteht, wo α eine Einheitswurzel und k eine natürliche Zahl ist; es gibt nur abzählbar viele G_x dieser Art, und für jedes G_x höchstens abzählbar viele in G_x reguläre $f(x)$.

Andererseits: wenn unter den Potenzreihen (1) mit Koeffizienten a_n aus A_n auch nur zwei, $f(x)$ und $\bar{f}(x)$, vorhanden sind, die für $|x| < 1$ konvergieren und nicht äquivalent sind (d. h. in diesem Falle: unendlich oft $\bar{a}_n \neq a_n$), so gibt es deren eine Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums, nämlich alle, deren $n$ter Koeffizient entweder a_n oder $\bar{a}_n$ ist, und man sieht, daß in unserer Klasse von Potenzreihen schon der Mächtigkeit nach (was im Raume aller Potenzreihen nicht zutrifft) die fortsetzbaren einen verschwindend seltenen Ausnahmefall darstellen.

Wir heben noch einige Spezialfälle des Satzes II hervor, wobei wir bemerken, daß auch beliebig viele von den Mengen A_n aus einer einzigen Zahl bestehen dürfen (man kann dann δ_n beliebig, etwa gleich 1 wählen).

Satz III: *Es sei A eine Menge komplexer Zahlen, von denen je zwei verschiedene eine Differenz vom Betrage $\geqq \delta > 0$ haben, und $c_0, c_1, \ldots$*

feste Zahlenfolge, in der die von Null verschiedenen die Bedingung $\overline{\lim}_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} \to 1$ *erfüllen. Dann gibt es höchstens abzählbar viele Potenzreihen*

$$f(x) = a_0 c_0 + a_1 c_1 x + a_2 c_2 x^2 + \ldots,$$

im Einheitskreis $|x| < 1$ *regulär und darüber hinaus fortsetzbar sind Koeffizienten* a_n *aus* A *haben.*

Denn bei festem n gehören die $a_n c_n$ der Menge A_n an, die aus den c_n multiplizierten Zahlen von A (für $c_n = 0$ also aus der einzigen 0) besteht, und worin für $c_n \neq 0$ zwei verschiedene Zahlen eine erenz vom Betrage $\geqq \delta |c_n| = \delta_n > 0$ mit $\delta_n^{\frac{1}{n}} \to 1$ haben.

Satz IV: *Es sei* $c_0, c_1, \ldots$ *eine feste Zahlenfolge, in der die von Null chiedenen die Bedingung* $\overline{\lim}_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} \to 1$ *erfüllen. Dann gibt es höchstens ihlbar viele Potenzreihen* (4) *mit ganzzahligen* a_n, *die im Einheits- s* $|x| < 1$ *regulär und darüber hinaus fortsetzbar sind.*

Insbesondere gibt es höchstens abzählbar viele Potenzreihen der Gestalt

$$\pm c_0 \pm c_1 x \pm c_2 x^2 \pm \ldots,$$

für $|x| < 1$ regulär und fortsetzbar sind; dies ist eine Verschärfung s bekannten Satzes der Herren Hurwitz und Pólya[4]).

Satz V. *Es gibt höchstens abzählbar viele Potenzreihen*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

ganzzahligen a_n, *die im Einheitskreise* $|x| < 1$ *regulär und darüber us fortsetzbar sind.*

Herr Pólya[5]) hat die Vermutung zur Diskussion gestellt, daß diese) *rationale* Funktionen sind; ihre Pole im Endlichen sind dann Ein- swurzeln und $f(x)$ von der Gestalt

$$f(x) = \frac{\text{ganzzahliges Polynom}}{(1-x^p)^q}.$$

Satz V kann als Stütze für diese Vermutung angesehen werden.

[4]) A. Hurwitz und G. Pólya, Zwei Beweise eines von Herrn Fatou vermuteten es, Acta math. 40 (1916), S. 179—183.

[5]) G. Pólya, Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten, Math. Ann. 77 3), S. 510.

(Eingegangen am 28. November 1918.)

Studien über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion.

Von

Harald Cramér in Stockholm.

Einleitung.

Die über alle nicht reellen Nullstellen $\varrho = \beta + \gamma i$ der Riemannschen Zetafunktion erstreckte Summe

$$\sum_{\varrho} \frac{x^{\varrho}}{\varrho}, \qquad (x > 0$$

(1)

wo die ϱ nach wachsendem $|\gamma|$ geordnet sind, spielt bekanntlich in der analytischen Primzahltheorie eine hervorragende Rolle. Diese Reihe stellt nämlich eine Funktion von x dar, welche in den Punkten $x = 1, p^m, \ldots$ unstetig, sonst aber für jedes positive x stetig ist. — Unter p^m verstehen wir hier, wie überall in dieser Arbeit, eine beliebige ganzzahlige Potenz der beliebigen Primzahl p.

Nachdem diese Tatsachen — sowie die Konvergenz von (1) für alle $x > 0$ — zuerst von Herrn von Mangoldt[1]) bewiesen waren, wurde die Untersuchung durch Herrn Landau[2]) auf die allgemeinere[3]) Reihe

$$\sum_{\gamma > 0} \frac{x^{\varrho}}{\varrho^k} \qquad (0 < k \leq 1$$

(2)

ausgedehnt. Hierbei bedeutet ϱ^k den Wert der für $s > 0$ positiven analytischen Funktion s^k bei Fortsetzung in der von 0 bis $-\infty$ aufgeschnittenen Ebene, und die Reihe ist wieder nach wachsendem $|\gamma|$ geordnet; auf die Reihenfolge der Glieder mit gleichem $|\gamma|$ kommt es bei Herrn Landau, wie auch in dieser Arbeit, nicht an.

---

[1]) H. v. Mangoldt, Journ. f. Mathematik, Bd. 114 (1895), S. 255–305.

[2]) E. Landau, Math. Annalen, Bd. 71 (1912), S. 548–564.

[3]) Der Ausdruck (1) stimmt nämlich, wenn immer zwei konjugierte ϱ zusammengefaßt werden, mit der doppelten Summe der reellen Teile von (2) für $k = 1$ überein

Über die Reihe (2) hat nun Herr Landau folgendes bewiesen:

a) *Konvergenz für* $x \neq 1$, p^m, $\frac{1}{p^m}$;

b) *gleichmäßige Konvergenz in jedem von diesen Punkten freien Intervall*;

c) *Divergenz*[4]) *für* $x = 1$, p^m, $\frac{1}{p^m}$.

Diese Tatsachen deuten auf einen arithmetischen Zusammenhang schen den Nullstellen ϱ und den Primzahlen p hin; Herr Landau lärt aber, er habe keine Ahnung, worin derselbe besteht.

Es liegt nun sehr nahe, und mag vielleicht auch nicht ganz uninter- ant erscheinen, die Reihe (2) auch für komplexe Werte der Veränder- ien x zu untersuchen. Dadurch wird man zwar nicht das Wesen des ngenannten Zusammenhanges erkennen, wohl aber wird man diesen ammenhang von einem neuen Gesichtspunkte aus erblicken. Es ist eckmäßig, zuerst eine neue Veränderliche z durch die Gleichung

$$x = e^z$$

zuführen und also die Reihe

$$\sum_{\gamma>0} \varrho^{-k} e^{\varrho z}$$

studieren.

Wird für einen Augenblick angenommen, daß die sogenannte emannsche Vermutung wahr ist, d. h. daß alle ϱ den reellen Teil $\frac{1}{2}$ en, so ergibt sich für $k = 1$ nach Multiplikation mit $e^{-\frac{1}{2}z}$ die Reihe

$$\sum_{\gamma>0} \frac{e^{\gamma i z}}{\varrho} = \sum_{\gamma>0} \frac{\cos \gamma z}{\varrho} + i \sum_{\gamma>0} \frac{\sin \gamma z}{\varrho}. \tag{3}$$

Aus den Untersuchungen des Herrn Landau geht nun hervor, daß erste Reihe rechts in (3) in den kritischen Punkten $z = \pm \log p^m$ ergiert, die zweite dagegen überall konvergiert, in der Umgebung der ischen Punkte aber nicht gleichmäßig. Dies erinnert an das Verhalten Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{niz}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n}$$

den Punkten $z = \pm 2\nu\pi$, wo genau dieselben Konvergenzeigenschaften treten. Wenn aber in dieser Reihe die Veränderliche auch komplexe rte annehmen darf, so wird durch sie eine analytische Funktion von z niert, die in den obigen Punkten logarithmische Singularitäten hat.

---

[4]) Und selbst mehr als dies, nämlich Nichtbeschränktheit und im Falle $0 < k < 1$ r Nichtbeschränktheit der Summe der reellen Teile.

Man könnte also — jetzt wieder ohne die Riemannsche Vermutung — glauben, daß die Reihe

$$\sum_{\gamma>0} \frac{e^{\varrho z}}{\varrho},$$

welche für $\Im(z) > 0$ unbedingt konvergiert, eine in den Punkten $z = \pm \log p^m$ logarithmisch singuläre Funktion von z darstellt. Die Ableitung dieser Funktion

$$V(z) = \sum_{\gamma>0} e^{\varrho z} \tag{4}$$

würde dann in jenen Punkten Pole erster Ordnung besitzen.

Dies trifft nun in der Tat zu. In dem ersten Kapitel dieser Arbeit wird nämlich die Funktion $V(z)$ für beliebige komplexe Werte von z dargestellt, und es werden über sie u. a. die folgenden Sätze abgeleitet.

1. *Wenn längs der negativen imaginären Achse ein Schnitt gemacht wird, so ist die Funktion $V(z)$ im Innern der ganzen aufgeschnittenen z-Ebene meromorph und hat nur die singulären Stellen $z = \pm \log p^m$, welche Pole erster Ordnung sind.*

2. *Die Funktion*

$$2\pi i\, V(z) - \frac{\log z}{1-e^{-z}} - \frac{C + \log 2\pi - \frac{1}{2}\pi i}{z}$$

ist in der ganzen Ebene eindeutig und — wenn in der Konvergenzhalbebene von (4), $\Im(z) > 0$, $0 < \arg z < \pi$ gesetzt wird — im Ursprung regulär.

Das zweite Kapitel bringt einige Anwendungen der obigen Untersuchung. Zunächst werden im ersten Abschnitt die schon oben angeführten Sätze von Landau über die Konvergenzverhältnisse der Reihe $\sum_{\gamma>0} \frac{x^\varrho}{\varrho^k}$ wieder abgeleitet. Wollte man die Riemannsche Vermutung als wahr annehmen, so würde es ein allgemeiner Konvergenzsatz von M. Riesz[5]) gestatten, unmittelbar von unseren obigen Sätzen über $V(z)$ auf die Landauschen Sätze zu schließen. Will man jedoch den Beweis ohne einschränkende Annahmen führen, so wird es notwendig, den Satz von M. Riesz etwas zu modifizieren. Wenn man den veränderten Satz nur für den uns interessierenden speziellen Fall der Reihe $\sum_{\gamma>0} \varrho^{-k} e^{\varrho z}$ ausspricht, so gestaltet sich sein Beweis sehr kurz und wird deshalb hier vollständig ausgeführt. Man wird erkennen, daß der Kern des Rieszschen Beweises von den unbedeutenden Änderungen vollständig unberührt geblieben ist.

[5]) M. Riesz, Acta Mathematica, Bd. 40 (1916), S. 349—361.

Wenn ich nicht irre, so lassen alle bisher bekannten, exakten (d. h. t asymptotischen) Formeln, welche die Nullstellen ϱ enthalten, auch Primzahlen explizit auftreten. Es wird daher vielleicht nicht ohne eresse sein, wenn im zweiten Abschnitt (unter Voraussetzung der Richeit der Riemannschen Vermutung) eine Formel abgeleitet wird, bei cher dies nicht der Fall ist, nämlich die Formel

$$\lim_{\nu \to 0} \sum_{\gamma > 0} e^{-\gamma \nu} \cos \gamma x = \frac{e^{\frac{3}{2}x} - e^{-\frac{3}{2}x} \mp e^{\mp \frac{1}{2}x}}{2(e^{x} - e^{-x})},$$

die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem x positiv oder tiv ist. Diese Formel ist indessen nur gültig, wenn x von 0 und den $\pm \log p^m$ verschieden ist.

Schließlich wird im dritten Abschnitt eine Untersuchung über das tglied $R(T)$ der Formel

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\left(\log \frac{T}{2\pi} - 1\right) + R(T)$$

estellt. Es bedeutet hier $N(T)$ die Anzahl der ϱ, welche der Bedin- $0 < \gamma \leqq T$ genügen. Dann gilt bekanntlich[6])

$$R(T) = O(\log T)$$

sogar im Falle der Richtigkeit der Riemannschen Vermutung[7])

$$R(T) = O\left(\log T \sqrt{\frac{\log \log \log T}{\log \log T}}\right);$$

gen gibt es unter derselben Voraussetzung eine positive Konstante c, laß sowohl

$$\limsup_{T \to \infty} \frac{R(T)}{(\log T)^c} = +\infty,$$

auch

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{R(T)}{(\log T)^c} = -\infty$$

(Vgl. Bohr und Landau, Math. Annalen, Bd. 74 (1913), S. 3—30.)

Es wird hier die Funktion von s

$$\int_0^\infty R(v) e^{-vs} dv$$

rsucht, und es wird *vorläufig* die Riemannsche Vermutung als wahr nommen. Alsdann hat die obige Funktion in den Punkten $s = \pm i \log p^m$ ache Pole und ist im Ursprung wie der Ausdruck

[6]) E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig Berlin 1909, Bd. I, S. 368.

[7]) H. Cramér, Mathematische Zeitschrift, Bd. 2 (1918), S. 237–241.

$$\frac{7}{8s} + p(s)\log s$$

singulär, unter $p(s)$ eine in der Umgebung von $s = 0$ konvergente Potenz-
reihe verstanden. Hieraus läßt sich unter Benutzung einer Verallge-
meinerung des obengenannten Satzes von M. Riesz der Mittelwertsatz

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T R(v)\,dv = \tfrac{7}{8}$$

und sogar

$$\int_0^T R(v)\,dv = \tfrac{7}{8} T + O(T^{\varepsilon})$$

für jedes $\varepsilon > 0$ ableiten.

Sodann wird aber gezeigt, daß dieses Resultat von der Frage nach
der Richtigkeit oder Unrichtigkeit der Riemannschen Vermutung in der
Tat gänzlich unabhängig ist, so daß die beiden letzten Gleichungen
unbedingt bestehen. Daß die dort auftretende Konstante gerade den
Wert $\frac{7}{8}$ hat, wird vielleicht besser verständlich nach einem Vergleich mit
der für „wurzelfreies" T geltenden Formel[8])

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\left(\log\frac{T}{2\pi} - 1\right) + \tfrac{7}{8} + O\left(\frac{1}{T}\right) + \frac{1}{\pi}\Delta_{abc}\arg\zeta(s),$$

wo a reell und > 1, $b = a + iT$ und $c = \frac{1}{2} + iT$ ist. Unter $\Delta_{abc}\arg\zeta(s)$
ist der Zuwachs von $\arg\zeta(s)$ gemeint, wenn s den gebrochenen Linienzug
abc beschreibt.

Auch in diesem Falle wird die Befreiung von den einschränkenden
Voraussetzungen durch eine Änderung der M. Rieszschen Sätze ermöglicht.
Ich verdanke Herrn M. Riesz mehrere liebenswürdige Mitteilungen über die
nötigen Änderungen, den Geltungsbereich und die Anwendbarkeit dieser
wichtigen Sätze, die zum Teil von ihm noch nicht veröffentlicht sind.
Erst durch diese Mitteilungen ist es mir möglich geworden, meine Sätze
in der angedeuteten Weise zu verallgemeinern.

Erstes Kapitel.

Definition und Darstellung der Funktion $V(x)$.

Es sei $z = x + yi$ eine komplexe Veränderliche, und es bezeichne
$\varrho = \beta + \gamma i$ eine beliebige komplexe Nullstelle der Riemannschen Zeta-
funktion[9]). Wir nehmen nun vorläufig $y > 0$ an; die Reihe $\Sigma e^{\varrho z}$, wo

[8]) R. J. Backlund, Acta Mathematica, Bd. 41 (1918), S. 351.

[9]) Es ist dann bekanntlich $0 < \beta < 1$, $|\gamma| > 12$.

diejenigen Nullstellen zu durchlaufen hat, deren Ordinaten γ positiv (mehrfache mehrfach gezählt), wird alsdann unbedingt konvergieren. setzen

$$V(z) = \sum_{\gamma>0} e^{\varrho z}$$

wollen die Funktion $V(z)$ für beliebige Werte von z darstellen und ersuchen.

Um zuerst $V(z)$ durch ein bestimmtes Integral darzustellen, wenden den Cauchyschen Integralsatz auf die Funktion

$$e^{sz}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

das Rechteck mit den Ecken $0,\ 1,\ 1+T_\nu i,\ T_\nu i$ in der Ebene der änderlichen $s=\sigma+it$ an; jedoch werden die Ecken 0 und 1 durch ne nach oben gerichtete Kreisbögen vom Radius $\varepsilon<\frac{1}{2}$ umgangen. rbei bezeichnet T_ν eine beliebige der von Landau[10]) eingeführten len, welche für jedes ganzzahlige ν den Bedingungen

$$\nu < T_\nu < \nu+1,$$

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log^2|s|)$$

chmäßig für $t=T_\nu$ und alle ν, genügen.

Der Integrand ist auf dem Integrationswege überall regulär, hat aber Innern für jedes ϱ, das die Bedingung $0<\gamma<T_\nu$ erfüllt, einen Pol er Ordnung. Wird der Integrationsweg mit R bezeichnet, so ist also

$$2\pi i \sum_{0<\gamma<T_\nu} e^{\varrho z} = \int_R e^{sz}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds.$$

Läßt man nun ν (durch ganze Zahlen) unendlich werden, so ist leicht chtlich, daß das Integral, erstreckt über die obere horizontale Rechteite, gegen den Grenzwert 0 strebt. Der Integrationsweg hat nämdie feste Länge 1, nach (5) gilt auf ihm

$$e^{sz}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(e^{-yT_\nu}\log^2 T_\nu).$$

Da, wie schon oben bemerkt, die Reihe $\sum_{\gamma>0} e^{\varrho z}$ für $y>0$ konvergiert, st

$$2\pi i\, V(z) = \int_{ABCDEF} e^{sz}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds,$$

[10]) Handbuch. I, S. 340.

wo die großen Buchstaben die folgenden Punkte bezeichnen (ε ist der gemeinsame Radius der kleinen Kreisbögen um 0 und 1):

$$A = +i\infty, \quad B = +i\varepsilon, \quad C = \varepsilon,$$
$$D = 1-\varepsilon, \quad E = 1+i\varepsilon, \quad F = 1+i\infty.$$

Jetzt wollen wir (6) durch teilweise Integration so umformen, daß anstatt $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ die Funktion $\log\zeta(s)$ auftritt; da aber diese Funktion unendlich vieldeutig ist, so wollen wir uns zuerst für einen bestimmten Zweig entscheiden. Wir schneiden die s-Ebene von $s=1$ bis $s=-\infty$ geradlinig auf und entfernen außerdem das durch die Ungleichungen

$$0<\sigma<1, \quad |t|>1$$

bestimmte Gebiet. In dem übrigbleibenden Teil der aufgeschnittenen Ebene ist jeder Zweig von $\log\zeta(s)$ eindeutig. Wir wählen denjenigen, der für $\sigma>1$ durch die Reihe

$$\sum_{p,m}\frac{1}{mp^{ms}}$$

dargestellt wird. Für das Folgende ist wichtig zu bemerken, daß diese Reihe auch noch für $\sigma=1, t\neq 0$ konvergiert, und zwar in jedem endlichen, den Punkt 1 ausschließenden Intervall der Geraden $\sigma=1$ gleichmäßig[11]). — Für $0<s<1$ hat der gewählte Zweig von $\log\zeta(s)$, wie man leicht findet, den imaginären Teil $-\pi i$ auf dem oberen, $+\pi i$ auf dem unteren Ufer des Schnittes, eine Bemerkung, die uns auch später nützlich sein wird.

Wenn wir jetzt (6) teilweise integrieren, so finden wir aus bekannten Sätzen über die Zetafunktion, daß der integrierte Teil an den Grenzen verschwindet. Es ist nämlich[12])

$$\log\zeta(1+it)=O(\log^2 t),$$

und nach der Funktionalgleichung (s. unten)

$$\log\zeta(it)=O(t\log t),$$

so daß wir

$$2\pi i V(z) = -z\int_{ABCDEF} e^{sz}\log\zeta(s)\,ds$$

[11]) Konvergenz für festes $t\neq 0$: Landau, *Handbuch*, Bd. I. S. 234—238. Die Aussage über gleichmäßige Konvergenz wird durch geeignete Abänderung des dortigen Gedankenganges bewiesen, folgt aber auch unmittelbar aus einem später anzuführenden Satz von M. Riesz.

[12]) Landau, *Handbuch*, Bd. I, S. 327.

alten. Diese Formel schreiben wir in der Form

$$2\pi i\, V(z) = z\int_{CBA} - z\int_{CD} - z\int_{DEF}$$

transformieren das erste Integral unter Anwendung der Funktionalchung der Zetafunktion:

$$\zeta(s) = \frac{(2\pi)^s}{\pi} \sin\frac{s\pi}{2}\, \Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

Es ergibt sich dann

$$z\int_{CBA} e^{sz} \log\zeta(s)\, ds = z\int_{CBA} e^{sz}\Big(s\log 2\pi - \log\pi + \log\sin\frac{s\pi}{2} + \log\Gamma(1-s) + \log\zeta(1-s)\Big)\, ds.$$

Es entsteht nun die Frage: wie sollen wir in der letzten Formel die deutigen Funktionen definieren, damit das Funktionszeichen $\log\zeta(\,)$ ner den vorhin gewählten Zweig dieser Funktion bezeichne? Betrachten zuerst die linke Seite von (8); nach einer früheren Bemerkung hat im Punkte C (d. h. $s = \varepsilon$) $\log\zeta(s)$ den imaginären Teil $-\pi i$ zu ilen, um ihn dann stetig variieren zu lassen. Wenn nun auf der rechten e von (8) die vier ersten Glieder in dem Klammerausdruck für $s = \varepsilon$ sind, so muß man in diesem Punkte auch $\log\zeta(1-s)$ den imaginären $-\pi i$ erteilen. Die Ebene ist nun von $s = 1$ bis $s = -\infty$ geradaufgeschnitten, und da der Punkt $s = \varepsilon$ unseres Integrationsweges an oberen Ufer des Schnittes liegt, so liegt $1-\varepsilon$ an dem unteren Ufer. er Zweig der Funktion $\log\zeta(s)$ hat aber hier den imaginäre Teil $+\pi i$; n also $\log\sin\frac{s\pi}{2}$ und $\log\Gamma(1-s)$ für $s = \varepsilon$ reell sein sollen, so muß (8) in folgender Weise berichtigen:

$$z\int_{CBA} e^{sz} \log\zeta(s)\, ds = z\int_{CBA} e^{sz}\Big(s\log 2\pi - \log\pi + \log\sin\frac{s\pi}{2} + \log\Gamma(1-s) + \log\zeta(1-s) - 2\pi i\Big)\, ds.$$

Wir führen nun diesen Ausdruck in (7) ein und lassen ε gegen Null hmen. Die Integrale über die kleinen Kreisbögen CB und DE werden ebenfalls gegen Null abnehmen, da jedes Glied des Integranden für 0 sowie für $s = 1$ entweder regulär ist oder höchstens eine logarithhe Singularität hat. Wir können also ruhig $\varepsilon = 0$ setzen, wenn wir nur bezüglich der vieldeutigen Funktionen folgendes merken:

1. Das Funktionszeichen $\log\zeta(\,)$, das nunmehr nur mit einem Argumentwert von der Form $1 + it$ auftreten wird, bezeichnet die durch die Reihe

$$\sum_{m,p} \frac{1}{p^{m(1+it)}}$$

dargestellte Funktion;

2. $\log \Gamma(1-s)$ soll für $s=0$ reell sein;

3. $\log \sin \frac{s\pi}{2}$ war für $s=\varepsilon$ reell; wenn nun s den Kreisbogen C beschreibt, so wird man im Punkte B (d. h. $s=i\varepsilon$) mit dem imaginären Teil $\frac{1}{2}\pi i$ eintreffen; da $\sin \frac{s\pi}{2}$ für rein imaginäres s selbst rein imaginär ist, so müssen wir $\log \sin \frac{s\pi}{2}$ auf der ganzen Strecke AB den festen imaginären Teil $\frac{1}{2}\pi i$ erteilen.

Es ergibt sich nun endlich aus (7)

$$(9)\quad \begin{cases} 2\pi i V(z) = -z\int_1^{1+i\infty} e^{sz}\log\zeta(s)\,ds + z\int_0^{i\infty} e^{sz}\log\zeta(1-s)\,ds - \\ \quad - z(\log\pi + 2\pi i)\int_0^{i\infty} e^{sz}\,ds + z\log 2\pi \int_0^{i\infty} s e^{sz}\,ds - \\ \quad - z\int_0^{1} e^{sz}\log\zeta(s)\,ds + z\int_0^{i\infty} e^{sz}\log\sin\frac{s\pi}{2}\,ds + z\int_0^{i\infty} e^{sz}\log\Gamma(1-s)\,ds. \end{cases}$$

Das erste Glied dieser Formel läßt sich auch in der Form

$$-z\int_1^{1+i\infty} e^{sz}\log\zeta(s)\,ds = -z\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+i\varepsilon}^{1+i\infty} e^{sz}\sum_{p,m}\frac{1}{mp^{ms}}\,ds$$

schreiben. Die unendliche Reihe läßt sich, einer früheren Bemerkung zufolge, unter Benutzung eines bekannten Dinischen Satzes[13]) gliedweise integrieren, wodurch man erhält

$$-z\int_1^{1+i\infty} e^{sz}\log\zeta(s)\,ds = ze^{z}\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{p,m}\frac{1}{mp^{m(1+i\varepsilon)}(z-\log p^m)} =$$

$$= ze^{z}\sum_{p,m}\frac{1}{mp^{m}(z-\log p^m)}.$$

Die unbedingte Konvergenz der letzten Reihe sowie die Zulässigkeit des Grenzüberganges $\varepsilon\to 0$ ist hier durch die Konvergenz der Reihe

---

[13]) Wenn $\Sigma f_n(x)$ für jedes $b>a$ gleichmäßig im Intervalle $a<x<b$, $\Sigma\int_a^x f_n(t)$ aber gleichmäßig für alle $x>a$ konvergiert, so gilt $\Sigma\int_a^{\infty} f_n(t)\,dt = \int_a^{\infty}\Sigma f_n(t)\,dt$.

$$\sum_{p,m} \frac{1}{m p^m \log p^m}$$

esichert. Das zweite Glied von (9) läßt sich in entsprechender Weise mformen, und man erhält nach einiger weiterer Rechnung

$$10)\quad \begin{cases} 2\pi i V(z) = z e^z \sum_{p,m} \frac{1}{m p^m (z - \log p^m)} - z \sum_{p,m} \frac{1}{m p^m (z + \log p^m)} + \\ + \frac{\log 2\pi}{z} + \log \pi + \pi i (1 + e^z) - z \int_0^1 e^{sz} \log |\zeta(s)|\, ds + \\ + z \int_0^{i\infty} e^{sz} \log \sin \frac{s\pi}{2}\, ds + z \int_0^{i\infty} e^{sz} \log \Gamma(1-s)\, ds. \end{cases}$$

Die beiden ersten Glieder des Ausdruckes rechts stellen in der ganzen bene meromorphe Funktionen von z dar, welche keine anderen Singuritäten als die Pole der einzelnen Glieder der Reihen, $z = \pm \log p^m$, esitzen. Die drei folgenden Glieder sind triviale Funktionen, und das ntegral von 0 bis 1 repräsentiert eine ganze Funktion von z. Wir wollen tzt die zwei letzten Glieder etwas näher untersuchen. Zunächst ist

$$11)\quad \begin{cases} z \int_0^{i\infty} e^{sz} \log \sin \frac{s\pi}{2}\, ds = z \int_0^{i\infty} e^{sz} \log \left[\frac{1}{2} i \left(e^{-\frac{1}{2} s\pi i} - e^{\frac{1}{2} s\pi i} \right) \right] ds = \\ = z \left(\frac{1}{2}\pi i - \log 2 \right) \int_0^{i\infty} e^{sz}\, ds + \frac{1}{2}\pi i z \int_0^{i\infty} s e^{sz}\, ds + z \int_0^{i\infty} e^{sz} \log \left(e^{-\pi i s} - 1 \right) ds = \\ = \log 2 - \frac{1}{2}\pi i + \frac{\frac{1}{2}\pi i}{z} + iz \int_0^{\infty} \log t\, e^{itz}\, dt + iz \int_0^{\infty} \log \frac{e^{\pi t} - 1}{t}\, e^{itz}\, dt^{14}) = \\ = C + \log 2 - \pi i + \frac{\frac{1}{2}\pi i}{z} + \log z - \log \pi - \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + 1 \right) e^{-\frac{z}{\pi i} t}\, dt = \\ = C + \log 2 + \frac{1}{2}\pi i \left(\frac{1}{z} - 1 \right) + \Psi\left(\frac{z}{\pi i} \right), \end{cases}$$

o C die Eulersche Konstante bezeichnet und $\Psi(\alpha) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$ gesetzt ist.

Betrachten wir jetzt das letzte Glied von (10). In $z = x + iy$ haben ir schon $y > 0$ angenommen; wir wollen nun für einen Augenblick auch > 0 annehmen. In dem Gebiete $\frac{\pi}{2} \leqq \arg s \leqq \pi$ gilt die Abschätzung

$$|e^{sz} \log \Gamma(1-s)| = e^{\sigma x - ty} |\log \Gamma(1-s)| = O\left(e^{-k|s|} |s| \log |s|\right),$$

[14]) Das letzte Integral wird durch teilweise Integration umgeformt.

unter k eine positive Konstante verstanden, so daß eine leichte Anwendung des Cauchyschen Satzes das Resultat

$$z\int_0^{i\infty} e^{sz}\log\Gamma(1-s) = z\int_0^{-\infty} e^{sz}\log\Gamma(1-s)\,ds =$$

$$= -ze^z\int_1^{\infty} e^{-sz}\log\Gamma(s)\,ds = -e^z\int_1^{\infty}\Psi(s)\,e^{-sz}ds.$$

ergibt. In diesem Ausdruck führen wir nun die folgende Integraldarstellung der Funktion $\Psi(s)$ ein:

$$\Psi(s) = -C + \int_0^{\infty}\frac{e^{-t}-e^{-ts}}{1-e^{-t}}\,dt.$$

Die Ordnung der beiden Integrationen wird dann vertauschbar, da alles auch nach Einführung der absoluten Beträge konvergent bleibt, und man erhält

$$(12)\quad \begin{cases} z\displaystyle\int_0^{i\infty} e^{sz}\log\Gamma(1-s) = \frac{C}{z} - e^z\int_0^{\infty}\frac{dt}{1-e^{-t}}\int_1^{\infty}(e^{-t-sz}-e^{-(t+z)s})\,ds = \\ \qquad = \dfrac{C}{z} - \dfrac{1}{z}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{t}{e^t-1}\cdot\frac{dt}{t+z}. \end{cases}$$

Nach Einführung der Ausdrücke (11) und (12) und nach Multiplikation mit $\frac{1}{2\pi i}$ nimmt (10) nun endlich die Gestalt

$$(13)\quad \begin{cases} V(z) = \dfrac{z}{2\pi i}e^z\displaystyle\sum_{p,\,m}\frac{1}{mp^m(z-\log p^m)} - \frac{z}{2\pi i}\sum_{p,\,m}\frac{1}{mp^m(z+\log p^m)} + \\ \quad + \left(\frac{1}{4}+\dfrac{C+\log 2\pi}{2\pi i}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) + \dfrac{1}{2\pi i}\Psi\left(\dfrac{z}{\pi i}\right) + \\ \quad + \frac{1}{2}e^z - \dfrac{z}{2\pi i}\displaystyle\int_0^{1} e^{sz}\log|\zeta(s)|\,ds - \frac{1}{2\pi i z}\int_0^{\infty}\frac{t}{e^t-1}\cdot\frac{dt}{t+z}. \end{cases}$$

Das letzte Integral konvergiert, wie unmittelbar ersichtlich, in jedem abgeschlossenen Teil der z-Ebene, das weder die Null noch eine negative reelle Zahl enthält, gleichmäßig. Jeder innere Punkt der Strecke $(0, -\infty)$ ist aber für die durch das Integral dargestellte Funktion regulär, wie man leicht durch Veränderung des Integrationsweges sieht. In der Tat findet man nach einer einfachen Abschätzung des Integranden durch Anwendung des Cauchyschen Satzes

$$\int_0^{\infty}\frac{t}{e^t-1}\cdot\frac{dt}{t+z} = \int_0^{\infty e^{i\alpha}}\frac{t}{e^t-1}\cdot\frac{dt}{t+z},$$

o rechts über den Vektor mit dem Argumente α in der t-Ebene inte-
iert wird. Hierbei wird $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$ voraus-
esetzt. Das letzte Integral hat aber den Vektor

$$\arg z = \pi + \alpha$$

s singuläre Linie und konvergiert in jedem außerhalb dieser Linie
legenen Gebiet gleichmäßig. Da α beliebig nahe an $\frac{\pi}{2}$ genommen werden
nn, sind wir nunmehr imstande, über die Funktion $V(z)$ den folgenden
tz auszusprechen:

1. *Wenn längs der negativen imaginären Achse ein Schnitt gemacht*
ird, so ist die Funktion $V(z)$ im Innern der ganzen aufgeschnittenen
Ebene meromorph und hat nur die singulären Stellen $z = \pm \log p^m$,
elche Pole erster Ordnung sind. Im Punkte $z = \log p^m$ ist das Residuum
eich $\frac{\log p}{2\pi i}$; für $z = -\log p^m$ aber ist es $\frac{\log p}{2 - i p^m}$.

Es möge hier bemerkt werden, daß die Funktion $e^{-\frac{1}{2}z} V(z)$, deren
eihenentwicklung unter Voraussetzung der Richtigkeit der Riemannschen
ypothese die einfache Gestalt $\sum_{\gamma > 0} e^{i\gamma z}$ hat, auch eine mehr symmetrische
orm der Residuen aufweist. Für $z = \pm \log p^m$ sind ihre Residuen
mlich $\frac{\log p}{2\pi i \sqrt{p^m}}$.

Um die Fortsetzung von $V(z)$ über den Schnitt hinaus auszuführen
d die übrigen Zweige zu untersuchen, haben wir nach (13) nur das
tzte Glied dieser Formel zu betrachten, da alle die übrigen Glieder
chts überall eindeutige Funktionen darstellen. Man überzeugt sich nun
rch eine einfache Überlegung, z. B. durch Anwendung eines bekannten
tzes von Hermite[15]), daß die Funktion

$$\frac{1}{z} \int_0^\infty \frac{t}{e^t - 1} \cdot \frac{dt}{t + z} - \frac{\log z}{e^{-z} - 1}$$

erall eindeutig ist. Wir wollen jetzt eine Rechnung anstellen, die uns
skunft über das Verhalten dieser Funktion im Nullpunkt geben wird.
ir setzen

4) $$\int_0^\infty \frac{t}{e^t - 1} \cdot \frac{dt}{t + z} = \int_0^1 + \int_1^\infty,$$

das letzte Integral eine in der von -1 bis $-\infty$ aufgeschnittenen

[15]) Hermite, Journal f. Mathematik, Bd. 91 (1881), S. 55. Vgl. auch Goursat,
urs d'Analyse, 2. Auflage, Paris 1911, Bd. 2, S. 252.

Ebene eindeutige und reguläre Funktion von z darstellt, die für $z=$ den Wert

$$\int_1^\infty \frac{dt}{e^t-1} \tag{15}$$

annimmt. Für das erste Integral rechts in (14) gilt, wenn für $|t|<2$

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu t^\nu$$

gesetzt wird,

$$\int_0^1 \frac{t}{e^t-1}\cdot\frac{dt}{t+z}=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \int_0^1 \frac{t^\nu\,dt}{t+z}$$

Schreiben wir hier $(t+z-z)^\nu$ für t^ν und entwickeln nach der Binomi formel, so ergibt sich nach zweckmäßiger Zusammenfassung der ve schiedenen Glieder

$$\left\{\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t}{e^t-1}\cdot\frac{dt}{t+z}=&\sum_{\nu=2}^{\infty} c_\nu \sum_{\mu=1}^{\nu-1}\binom{\nu}{\mu}(-z)^\mu \int_0^1 (t+z)^{\nu-\mu-1}\,dt+\\ &+\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \int_0^1 (t+z)^{\nu-1}\,dt+\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(-z)^\nu \int_0^1 \frac{dt}{t+z}.\end{aligned}\right. \tag{16}$$

Betrachten wir das Verhalten der drei Glieder rechts für $z=0$. I Doppelreihe stellt — wie das folgende Glied — eine für $|z|<1$ regul Funktion dar und verschwindet für $z=0$. Das zweite Glied nimmt d den Wert

$$\int_0^1 \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu t^{\nu-1}\,dt=\int_0^1\left(\frac{1}{e^t-1}-\frac{c_0}{t}\right)dt=\int_0^1\left(\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}\right)dt \tag{17}$$

an. Das dritte Glied endlich ist gleich

$$\log\frac{z+1}{z}\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(-z)^\nu=\frac{z\,[\log z-\log(z+1)]}{e^{-z}-1}=\frac{z\log z}{e^{-z}-1}+z\,\mathfrak{P}(z), \tag{18}$$

unter $\log z$ den für $z>0$ reellen Zweig und unter $\mathfrak{P}(z)$ eine für $|z|<$ konvergente Potenzreihe verstanden. Setzt man

$$\beta=\int_0^1\left(\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}\right)dt+\int_1^\infty \frac{dt}{e^t-1},$$

so erhält man nach (14) bis (18)

$$\frac{1}{z}\int_0^\infty \frac{t}{e^t-1}\cdot\frac{dt}{t+z}=\frac{\log z}{e^{-z}-1}+\frac{\beta}{z}+\mathfrak{P}_1(z), \tag{19}$$

o $\mathfrak{P}_1(z)$ eine zu $\mathfrak{P}(z)$ analoge Bedeutung hat. Wir bemerken beiläufig, aß die Koeffizienten von $\mathfrak{P}_1(z)$ sämtlich reell sind. Es wird sich aber tzt ergeben, daß hier

20) $$\beta = 0$$

t. In der Tat gilt ja

$$C = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{te^t}\right) dt,$$

oraus

$$\beta - C = \int_0^1 \frac{dt}{t}(e^{-t}-1) + \int_1^\infty \frac{dt}{t} e^{-t} = \int_0^1 \log t\, e^{-t}\, dt + \int_1^\infty \log t\, e^{-t}\, dt$$
$$= \Gamma'(1) = -C,$$

h. $\beta = 0$ folgt.

Der Ausdruck

$$\frac{1}{z}\int_0^\infty \frac{t}{e^t-1} \cdot \frac{dt}{t+z} - \frac{\log z}{e^{-z}-1}$$

ellt eine überall eindeutige Funktion von z dar. Sein erstes Glied bleibt r $-\pi < \arg z < \pi$ regulär; es ist leicht ersichtlich, daß dieses erste Glied den Punkten $z = \pm 2\nu\pi i$ einfache Pole bekommt, sobald man $\arg z$ nbeschränkt variieren läßt. Das Residuum der durch

$$\frac{1}{z}\int_0^\infty \frac{t}{e^t-1} \cdot \frac{dt}{t+z}$$

argestellten Funktion für $z = \pm 2\nu\pi i$ ist offenbar gleich

$$-i(\arg z \mp \tfrac{1}{2}\pi).$$

Aus diesen Betrachtungen und den Formeln (13), (19) und (20) ergibt ch, daß unsere frühere Aussage über die Singularitäten der Funktion $V(z)$ der folgenden Weise ergänzt werden kann.

2. *Die Funktion*

1) $$V(z) - \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\log z}{1-e^{-z}} + \frac{C + \log 2\pi - \frac{1}{2}\pi i}{z}\right)$$

in der ganzen Ebene eindeutig und — wenn in der Konvergenz-lbebene der Reihe (4) $0 < \arg z < \pi$ *gesetzt wird — im Ursprung regulär.*

3. *Die Punkte* $z = \pm 2\nu\pi i$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *sind für* $V(z)$ *einfache Pole it dem Residuum* $\frac{1}{2\pi}(\arg z - \frac{1}{2}\pi)$. *Die Punkte* $z = -\pi i, -3\pi i, \ldots$ *nd gleichfalls einfache Pole mit dem Residuum* $-\frac{1}{2}$.

Da wir später den Wert der Funktion (21) für $z = 0$ — oder viel-

mehr ihres reellen Teiles — brauchen, wollen wir diesen Wert jetzt b rechnen. Indem wir die Glieder erster und höherer Ordnung außer Betrac lassen, erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi i}\Psi\left(\frac{z}{\pi i}\right) = -\frac{1}{2z} - \frac{C}{2\pi i} + \dots, \qquad \tfrac{1}{2}e^z = \tfrac{1}{2} + \dots,$$

$$-\frac{1}{2\pi i z}\int_0^{\infty} \frac{t}{e^t - 1}\cdot\frac{dt}{t+z} = \frac{\log z}{2\pi i(1-e^{-z})} + \frac{\alpha_0}{2\pi i} + \dots,$$

wo nach einer früheren Bemerkung α_0 reell ist. Unter Benutzung v (13) ergibt sich also

$$(22) \qquad V(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\log z}{1-e^{-z}} + \frac{C + \log 2\pi - \frac{1}{2}\pi i}{z} - \frac{}{}\right) + \tfrac{3}{4} + i\eta + z\,\mathfrak{P}_2(z),$$

wo η reell ist und die Potenzreihe $\mathfrak{P}_2(z)$ für $|z| < \log 2$ konvergent i

Zweites Kapitel.

Anwendungen.

I. Der Landausche Satz über $\sum_{\gamma>0} \frac{x^\varrho}{\varrho^k}$.

Die Reihe $\sum_{\gamma>0} \frac{x^\varrho}{\varrho^k}$ $\quad (0 < k \leqq 1,\ x > 0)$ *ist*

a) *für* $x \neq 1,\ p^m,\ \frac{1}{p^m}$ *konvergent*;

b) *in jedem von diesen Punkten freien Intervalle gleichmäßig ko veraent*;

c) *für* $x = 1,\ p^m,\ \frac{1}{p^m}$ *divergent.*

Die Substitution $x = e^z$ führt die Punkte $x = p^m,\ 1,\ \frac{1}{p^m}$ $z = \log p^m,\ 0,\ -\log p^m$ über. Es gilt nun

$$(23) \qquad V_k(z) = \sum_{\gamma>0}\frac{e^{\varrho z}}{\varrho^k} = \frac{e^{-\frac{1}{2}k\pi i}}{\Gamma(k)}\sum_{\gamma>0}\int_0^{\infty} t^{k-1}\,e^{\varrho(z+it)}\,dt$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}k\pi i}}{\Gamma(k)}\int_0^{\infty} t^{k-1}\,V(z+it)\,dt$$

und

$$V(z) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(1-k)\pi i}}{\Gamma(1-k)}\cdot\frac{d}{dz}\int_0^{\infty} t^{-k}\,V_k(z+it)\,dt,$$

was in analoger Weise bewiesen wird. Aus diesen Gleichungen läßt si ohne weiteres ablesen, daß die Funktionen $V(z)$ und $V_k(z)$ für ree

Werte von z gleichzeitig regulär oder singulär sind; die oben aufgezählten Punkte sind also eben die reellen Singularitäten von $V_k(z)$.

Wenn nun die Riemannsche Vermutung bewiesen wäre, so würde man nach Multiplikation von $V_k(z)$ mit $e^{-\frac{1}{2}z}$ durch die Substitution $z = is$ eine Dirichletsche Reihe $\sum_{\gamma>0} \varrho^{-k} e^{-\gamma s}$ erhalten. Auf diese Reihe könnte man dann einen allgemeinen Konvergenzsatz von M. Riesz[16]) anwenden und dadurch den Satz von Landau beweisen. Wir wollen aber den Beweis ohne einschränkende Annahmen führen und werden darum nötig haben, in den Voraussetzungen und dem Beweis des Rieszschen Satzes einige geringfügige Änderungen vorzunehmen. Wenn nämlich der reelle Teil von ϱ nicht durchweg gleich $\frac{1}{2}$ ist, so kommt man auf eine Dirichletsche Reihe mit komplexen Exponenten, und der allgemeine Satz von M. Riesz läßt sich nicht ohne weiteres für diesen Fall verallgemeinern. In unserem speziellen Falle aber, wo die Koeffizienten der Reihe von der Größenordnung ϱ^{-k} sind, gestaltet sich der Beweis ziemlich einfach.

Es bezeichne $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ die Nullstellen in der oberen Halbebene, nach wachsenden Ordinaten geordnet (mehrfache mehrfach gezählt, die Reihenfolge der ϱ mit gleicher Ordinate bleibt beliebig). Setzen wir $\varrho_n = \beta_n + i\gamma_n$, so ist bekanntlich die Anzahl der ϱ_n, welche der Bedingung $T < \gamma_n \leqq T+1$ genügen, gleich $N(T+1) - N(T) = O(\log T)$. Um nun die Teile a und b des Landauschen Satzes zu beweisen, bemerken wir, daß eine abgeschlossene Strecke der reellen z-Achse, welche die Punkte $z = 0, \pm \log p^m$ ausschließt, immer in einer größeren Strecke enthalten ist, welche dieselbe Eigenschaft hat. Es seien z_1 und $z_2 > z_1$ die Endpunkte der größeren Strecke; dann läßt sich offenbar die positive Zahl c so wählen, daß die Funktion $V_k(z)$ auch noch im Rechteck z_1, z_2, $z_2 - ci$, $z_1 - ci$ regulär ist. Wir setzen der Kürze halber $z_1' = z_1 - ci$, $z_2' = z_2 - ci$, $z_1'' = z_1 + ci$, $z_2'' = z_2 + ci$. Wir betrachten jetzt die Funktionen

$$g_n(z) = e^{-\gamma_n^2 z}(z - z_1)(z - z_2)\left[V_k(z) - \sum_{\nu=1}^{n} \varrho_\nu^{-k} e^{\varrho_\nu z}\right]$$

und werden zeigen, daß bei hinreichend großem n auf der ganzen Begrenzung des Rechtecks z_1', z_1'', z_2'', z_2'

$$|g_n(z)| < \varepsilon$$

wird, wie klein auch die positive Zahl ε gewählt sein mag.

Für positives y konvergiert die Reihe $\sum_1^\infty \varrho_n^{-k} e^{\varrho_n z}$, und es gilt

[16]) M. Riesz, Acta Mathematica, Bd. 40 (1916), S. 349—361.

$$V_k(z) - \sum_1^n \varrho_\nu^{-k} e^{\varrho_\nu z} = \sum_{n+1}^{\infty} \varrho_\nu^{-k} e^{\varrho_\nu z}.$$

In dem Intervalle $\gamma_n + \mu < \gamma \leqq \gamma_n + \mu + 1$ gibt es nun $O[\log(\gamma_n + \mu)$ Nullstellen, so daß man erhält

$$(24) \quad V_k(z) - \sum_1^n \varrho_\nu^{-k} e^{\varrho_\nu z} = O\Big[\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\log(\gamma_n+\mu)}{(\gamma_n+\mu)^k} e^{-(\gamma_n+\mu)y}\Big] = O\Big(\gamma_n^{-k} \log \gamma_n \frac{e^{-\gamma}}{y}$$

gleichmäßig für alle $y > 0$. Ist nun z ein beliebiger Punkt der Strecke z_1, z_1'', so ist $|z - z_1| = y$; demnach ist nach (24) gleichmäßig auf dieser Strecke

$$(25) \qquad g_n(z) = O\Big[e^{\gamma_n y} \cdot y\, \gamma_n^{-k} \log \gamma_n \frac{e^{-\gamma_n y}}{y}\Big] = O(\gamma_n^{-k} \log \gamma_n).$$

Dieselbe Ungleichung gilt aus Symmetriegründen auch für die Strecke z_2, z_2''. Es sei jetzt z ein Punkt der auf der Geraden $y = c$ gelegenen Strecke z_1'', z_2''; dann ist wegen (24)

$$(26) \qquad g_n(z) = O\Big(e^{\gamma_n c} \gamma_n^{-k} \log \gamma_n \frac{e^{-\gamma_n c}}{c}\Big) = O(\gamma_n^{-k} \log \gamma_n).$$

Um $g_n(z)$ auch für $y < 0$ abzuschätzen, bezeichnen wir mit M das Maximum von $|V_k(z)|$ in unserem Rechtecke. Dann gilt gleichmäßig für $-c \leqq y < 0, \quad z_1 \leqq x \leqq z_2$

$$V_k(z) - \sum_1^n \varrho_\nu^{-k} e^{\varrho_\nu z} = O\Big(M + \sum_{\mu=1}^{\gamma_n} \frac{\log \mu}{\mu^k} e^{-\mu y}\Big) = o\Big(\frac{e^{-\gamma_n y}}{y}\Big).$$

Hieraus kann nunmehr ähnlich wie oben für die in der Halbebene $y <$ gelegenen Seiten des Rechteckes die Abschätzung

$$(27) \qquad g_n(z) = o(1)$$

gefolgert werden.

Bei hinreichend großem n ergeben nun (25), (26) und (27) die Ungleichung

$$|g_n(z)| < \varepsilon.$$

für die ganze Begrenzung des Rechtecks. Da die Funktionen $g_n(z)$ im Rechtecke regulär sind, so gilt die letzte Ungleichung auch im Innern, also ist insbesondere auf der Strecke z_1, z_2 der reellen Achse

$$\Big|V_k(z) - \sum_1^n \varrho_\nu^{-k} e^{\varrho_\nu z}\Big| < \frac{\varepsilon}{|z - z_1| \cdot |z - z_2|},$$

d. h. die Reihe $\sum_{\nu>0} \varrho^{-k} e^{\varrho z}$ konvergiert gleichmäßig auf jeder in $z_1 < z <$ gänzlich enthaltenen abgeschlossenen Strecke.

In den ausgeschlossenen Punkten $z = 0, \pm \log p^m$ aber kann unsere Reihe nicht konvergent sein. Für den Punkt $z = 0$ folgt dies unmittelbar, da

$$\sum \left(\frac{1}{\varrho_n^k} - \frac{1}{(i\gamma_n)^k} \right)$$

unbedingt konvergiert, während $\sum \gamma_n^{-k}$ divergiert. Nehmen wir aber an, die Reihe $\sum_{\gamma>0} \varrho^{-k} e^{\varrho z}$ sei in einem beliebigen Punkte $z = x_0$ der reellen Achse konvergent, so gilt für positives y, wenn wir

$$S_{n,m} = \sum_n^m \varrho_\nu^{-k} e^{\varrho_\nu x_0}$$

setzen,

$$+ yi) = \sum_1^\infty \varrho_\nu^{-k} e^{\varrho_\nu (x_0 + yi)} = \sum_1^{n-1} \varrho_\nu^{-k} e^{\varrho_\nu (x_0 + yi)} + \sum_n^\infty S_{n,\nu} (e^{\varrho_\nu yi} - e^{\varrho_{\nu+1} y}$$

Wenn nun ε eine beliebig kleine positive Größe bezeichnet, können wir n so groß wählen, daß für alle $m \geqq n$

$$|S_{n,m}| < \varepsilon$$

wird. Es gilt dann, wenn y gegen Null abnimmt, unter K_1, K_2, K_3 absolute Konstanten verstanden,

$$V_k(x_0 + yi) < K_1 + \varepsilon \sum_n^\infty \left| e^{\varrho_\nu yi} - e^{\varrho_{\nu+1} yi} \right|$$

$$< K_1 + K_2 y\varepsilon \sum_1^\infty e^{-\gamma_\nu y} < K_1 + K_3 y\varepsilon \sum_1^\infty \log n\, e^{-ny} = o\left(\log \frac{1}{y}\right).$$

Bezeichnet aber x_0 einen der reellen Pole von $V(z)$, so findet man leicht unter Benutzung von (23), daß $V_k(z)$ dort wie $(z - x_0)^{k-1}$ oder wie $\log (z - x_0)$, je nachdem $k < 1$ oder $k = 1$ ist, unendlich wird. In diesen Punkten muß also unsere Reihe divergieren.

II. Ein Grenzwertsatz.

In diesem Abschnitt wird die Riemannsche Vermutung als wahr angenommen. — Betrachten wir nun unter dieser Annahme die Gleichung (13) des vorigen Kapitels. Nach Multiplikation mit $e^{-\frac{1}{2}z}$ nimmt die linke Seite die Gestalt $\sum_{\gamma>0} e^{i\gamma z} = \sum_{\gamma>0} e^{i\gamma(x+yi)}$ an, wenn wir $y > 0$ voraussetzen.

Nehmen wir nun auch $x > 0$ und von den Werten $\log p^m$ verschieden an, vergleichen wir die reellen Teile der beiden Seiten von (13), und lassen wir dann y gegen Null abnehmen. Dann ergibt sich

$$\lim_{y\to 0}\sum_{\gamma>0} e^{-\gamma y}\cos\gamma x = e^{-\frac{1}{2}x}\left[\tfrac{1}{4}\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2\pi}\Im\left(\Psi\left(\frac{x}{\pi i}\right)\right)+\tfrac{1}{2}e^{x}\right].$$

Es gilt nun

$$\Psi\left(\frac{x}{\pi i}\right) = -C-\frac{\pi i}{x}+\pi i\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\pi i}-\frac{1}{x+n\pi i}\right)$$

$$= -C-\frac{\pi i}{x}+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x-n\pi i}{n(x^2+n^2\pi^2)},$$

also

$$\frac{1}{2\pi}\Im\left(\Psi\left(\frac{x}{\pi i}\right)\right) = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2\pi^2}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{e^{2x}-1}\right)$$

und

$$\lim_{y\to 0}\sum_{\gamma>0} e^{-\gamma y}\cos\gamma x = \tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\left(e^{x}-\frac{1}{e^{2x}-1}\right) = \frac{e^{\frac{3}{2}x}-e^{-\frac{3}{2}x}-e^{-\frac{1}{2}x}}{2(e^{x}-e^{-x})}$$

Diese Formel gilt für positives x. Ist aber $x<0$, so ist der Grenz wert des letzten Gliedes von (13) für $y\to 0$ nicht mehr rein imaginä und es ergibt sich, wenn man die für negatives x in ähnlicher Weise g fundene Formel mit der vorigen zusammenfaßt,

$$(28)\qquad \lim_{y\to 0}\sum_{\gamma>0} e^{-\gamma y}\cos\gamma x = \frac{e^{\frac{3}{2}x}-e^{-\frac{3}{2}x}\mp e^{\mp\frac{1}{2}x}}{2(e^{x}-e^{-x})},$$

wo das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem x positiv od negativ ist. Man kann diese Formel auch aus der vorigen ableiten, wen man nur bemerkt, daß die linke Seite eine gerade Funktion von x darstell

Die Gleichung (28) erscheint dadurch interessant, daß in ihr d Primzahlen gar nicht explizit auftreten; sie bleibt indessen, wie scho oben betont, nur richtig, wenn x von 0 und den $\pm\log p^m$ verschiede ist. Wenn $x=\pm\log p^m$ ist, so strebt die linke Seite von (28) gegen de Grenzwert $\mp\infty$.

III. Mittelwertsatz für das Restglied $R(T)$.

Es werde *vorläufig* die Riemannsche Vermutung als wahr ang nommen. Dann lautet die Gleichung (22) für positives y

$$(29)\qquad e^{\frac{1}{2}z}\sum_{\gamma>0} e^{i\gamma z} = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\log z}{1-e^{-z}}+\frac{C+\log 2\pi-\frac{1}{2}\pi i}{z}\right)+\tfrac{3}{4}+i\eta+zp(z),$$

wo η reell ist und die Potenzreihe $p(z)$ — wie im folgenden $p_1, p_2, \ldots$ — für $|z|<\log 2$ konvergent bleibt. Der Logarithmus hat für rein imag näres z den imaginären Teil $\frac{1}{2}\pi i$. Wird hier

$$z = si = se^{\frac{1}{2}\pi i}$$

esetzt, so ergibt sich

30)
$$\left\{\begin{aligned}\sum_{\gamma>0} e^{-\gamma s} &= \frac{e^{-\frac{1}{2}is}}{2\pi i}\left(\frac{\log s+\frac{1}{2}\pi i}{-1-e^{-is}}+\frac{C+\log 2\pi-\frac{1}{2}\pi i}{is}\right)+\tfrac{3}{4}+i\eta+sp_1(s)\\ &= -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\log s+\frac{1}{2}\pi i}{2\sin\frac{s}{2}}+\frac{C+\log 2\pi-\frac{1}{2}\pi i}{s}\right)+\tfrac{7}{8}+i\eta_1+sp_2(s)\\ &= -\frac{C+\log 2\pi s}{2\pi s}+\frac{1}{2\pi}\log s\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{2\sin\frac{s}{2}}\right)+\tfrac{7}{8}+i\eta_1+sp_3(s),\end{aligned}\right.$$

vo auch η_1 reell ist. Läßt man nun s durch positive Werte gegen Null bnehmen. so ist sofort ersichtlich, daß $\eta_1 = 0$ sein muß. und wir erhalten ndlich

31)
$$\sum_{\gamma>0} e^{-\gamma s} = -\frac{C+\log 2\pi s}{2\pi s}+\tfrac{7}{8}+sp_4(s)\log s+sp_3(s).$$

Lassen wir nun für einen Augenblick $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < \ldots$ die Ordinaten ler Nullstellen ϱ, *von ihrer Vielfachheit abgesehen*, bezeichnen. Die bige Reihe nimmt dann folgende Form an:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[N(\gamma_n)-N(\gamma_{n-1})\right]e^{-\gamma_n s} = \sum_{n=1}^{\infty} N(\gamma_n)\left(e^{-\gamma_n s}-e^{-\gamma_{n+1} s}\right) = s\int_0^{\infty} N(v)e^{-vs}\,dv$$

$$= s\int_0^{\infty}\frac{v}{2\pi}\left(\log\frac{v}{2\pi}-1\right)e^{-vs}\,dv + s\int_0^{\infty} R(v)e^{-vs}\,dv$$

$$= -\frac{C+\log 2\pi s}{2\pi s}+s\int_0^{\infty} R(v)e^{-vs}\,dv,$$

nd es ergibt sich[17])

33)
$$\int_0^{\infty} R(v)e^{-vs}\,dv = \frac{7}{8s}+p_4(s)\log s+p_3(s),$$

der, wenn wir

34)
$$R(v) = \tfrac{7}{8}+\bar{R}(v)$$

etzen,

35)
$$f(s) = \int_0^{\infty}\bar{R}(v)e^{-vs}\,dv = p_4(s)\log s+p_3(s).$$

---

[17]) Die von den Primzahlen abhängigen Singularitäten $s = \pm i\log p^m$ der Funktion $\zeta(is)$ sind also auch noch für die Funktion $\int_0^{\infty} R(v)e^{-vs}\,dv$ Pole erster Ordnung.

Der im ersten Abschnitte dieses Kapitels angeführte Satz von M. Riesz gilt, wie sein Entdecker besonders hervorhebt, nicht nur für Dirichletsche Reihen, sondern unter geeigneter Abänderung der Voraussetzungen auch für Integrale von der Form

$$\int_0^\infty a(v) e^{-vs} dv.$$

M. Riesz hat in seinen Arbeiten über diesen Gegenstand auch bedeutende Verallgemeinerungen seines Satzes in Aussicht gestellt[18]). Auf meine diesbezügliche Anfrage hat er mir freundlichst mitgeteilt, daß er u. a. den folgenden Satz beweisen kann.

Es sei $\lim_{v \to \infty} a(v) = 0$ *und es möge die Funktion*

$$\varphi(s) = \varphi(\sigma + it) = \int_0^\infty a(v) e^{-vs} dv$$

im Gebiete

$$0 < |s| \leqq \delta, \quad \sigma \geqq 0$$

regulär sein und daselbst die Ungleichung

$$|\varphi(s) - A| < |s|^\eta, \tag{36}$$

---

[18]) Vgl. M. Riesz, loc. cit.[5]), S. 350, sowie Journal f. Mathematik, Bd. 140 (1911), S. 89—99 und Comptes rendus, Bd. 149 (1909), S. 909—912. Über den noch nicht veröffentlichten Beweis des folgenden Satzes mögen hier einige Andeutungen Platz finden. Es gilt für jedes s im Innern des angedeuteten Gebietes $\varphi(s) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{C_1} \frac{\varphi(z)\,dz}{z-s} + \int_{C_2} \frac{\varphi(z)\,dz}{z-s}\right] = J_1 + J_2$, wo C_1 die Strecke $|t| < \delta$ der imaginären Achse, C_2 der übrigbleibende Teil der Begrenzung des Gebietes bezeichnen. Unter Benutzung der Gleichung $\frac{1}{z-s} = -\int_0^\infty e^{(z-s)v} dv$ findet man $a(v) = a_1(v) + a_2(v)$, $J_1 = \int_0^\infty a_1(v) e^{-vs} dv$, $\lim_{v\to\infty} a_1(v) = 0$ sowie analoge Beziehungen für J_2 und $a_2(v)$. Es gilt übrigens $a_1(v) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} e^{vz} \varphi(z)\,dz$. Die Konvergenz von $\int_0^\infty a_1(v)\,dv$ läßt sich nun genau so beweisen, wie die Konvergenz einer Fourierschen Reihe in einem Punkte, wo die zugehörende Funktion eine Lipschitzsche Bedingung befriedigt, d. h. durch Anwendung eines bekannten Riemannschen Satzes (Gesammelte Mathematische Werke, zweite Auflage, Leipzig 1892, S. 254), aus dem auch die Behauptung $\lim a_1(v) = 0$ folgt. Für das Glied J_2 aber, das im Ursprung regulär ist, gilt der im Abschnitt I angeführte Satz aus Acta Math. 40 (loc. cit.[5]), S. 350 und 360), womit alles bewiesen ist.

o $\eta > 0$ ist und A eine Konstante bezeichnet, erfüllen. Dann konver-iert das Integral

$$\int_0^\infty a(v)\,dv$$

Wir wollen nun zeigen, daß die Voraussetznngen dieses Satzes bei er Funktion

$$f_k(s) = \int_0^\infty v^{-k}\,\bar{R}(v)\,e^{-vs}\,dv, \qquad 0 < k \leqq 1$$

rfüllt sind. Zunächst ist für jedes $k > 0$

$$\lim_{v\to\infty} v^{-k}\,\bar{R}(v) = 0.$$

s gilt nun weiter

$$f_k(s) = \frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^\infty \bar{R}(v)\,e^{-vs}\,dv \int_0^\infty z^{k-1}\,e^{-vz}\,dz = \frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^\infty z^{k-1} f(s+z)\,dz;$$

ir jedes $\delta < \log 2$ ist also $\varphi(s)$ im Gebiete $0 < |s| \leqq \delta$, $\sigma \geqq 0$ regulär, chreiben wir nun unter Benutzung von (35)

$$(s) = \int_0^\delta z^{k-1} p_4(s+z)\log(s+z)\,dz + \int_0^\delta z^{k-1} p_3(s+z)\,dz + \int_\delta^\infty z^{k-1} f(s+z)\,dz,$$

o haben wir nur noch zu zeigen, daß für hinreichend kleines δ jedes der rei Glieder rechts eine Ungleichung von der Form (36) befriedigt. Für ie beiden letzten Glieder gilt dies in der Tat, da sie, wie leicht ersicht-ch, für $s = 0$ regulär sind. Wir wollen jetzt beweisen, daß dies auch ir das erste Glied gilt, wenn man $0 < \eta < k$ und

$$A = \int_0^\delta z^{k-1} p_4(z)\log z\,dz$$

nnimmt. Schreiben wir

$$p_4(z) = c + z p_5(z),$$

o wird

$$\int_0^\delta z^{k-1} p_4(s+z)\log(s+z)\,dz - A = c\int_0^\delta z^{k-1}\log\frac{s+z}{z}\,dz +$$

$$+\int_0^\delta z^{k-1}\left[(s+z)\,p_5(s+z)\log(s+z) - z p_5(z)\log z\right]dz = \Delta_1(s) + \Delta_2(s).$$

Im Gebiete $0 < |s| \leqq \delta$, $\sigma \geqq 0$ gilt nun, wenn δ hinreichend klein nd $0 < \eta < k$ ist,

$$|\Delta_1(s)| < |c| \int_0^\delta z^{k-1} \left(\log \frac{z+|s|}{z} + \operatorname{arctg} \frac{|s|}{z}\right) dz$$

$$< |c| \cdot |s|^k \int_0^\infty z^{k-1} \left(\log \frac{z+1}{z} + \operatorname{arctg} \frac{1}{z}\right) dz < \tfrac{1}{2} |s|^\eta$$

und

$$|\Delta_2(s)| < \int_0^\delta z^{k-1} dz \left| \int_z^{z+s} \frac{d}{dx}(x p_5(x) \log x) dx \right| < M \cdot |s| \int_0^\delta z^{k-1} \log \frac{1}{z} dz < \tfrac{1}{2} |s|$$

Hieraus ergibt sich nun

$$\left| \int_0^\delta z^{k-1} p_4(s+z) \log(s+z) dz - A \right| < |s|^\eta;$$

die Funktion $f_k(s)$ befriedigt also eine Ungleichung von der Form (36), und es konvergiert nach dem Satze von M. Riesz das Integral

$$\int_0^\infty v^{-k} \bar{R}(v) dv$$

für jeden positiven Wert von k.

Es gilt also für $0 < k < 1$

$$\int_1^T v^{-k} \bar{R}(v) dv = \alpha_k(T), \tag{37}$$

wo $\lim_{T \to \infty} \alpha_k(T)$ existiert, und also insbesondere $\alpha_k(T)$ für $T \geqq 1$ beschränkt ist. Es sei etwa

$$|\alpha_k(T)| < M_k.$$

Wir setzen

$$\int_1^T \bar{R}(v) dv = T^k g(T) \tag{38}$$

und erhalten nach einer teilweisen Integration aus (37)

$$g(T) = \alpha_k(T) - k \int_1^T g(v) \frac{dv}{v}.$$

Diese Integralgleichung wird nach dem gewöhnlichen iterierenden Verfahren gelöst, und es ergibt sich

$$g(T) = \alpha_k(T) - k \int_1^T \alpha_k(v) \frac{dv}{v} + k^2 \int_1^T \frac{dv}{v} \int_1^v \alpha_k(v_1) \frac{dv_1}{v_1} - \ldots, \tag{36}$$

$$|g(T)| < M_k\left(1 + \frac{k}{1}\log T + \frac{k^2}{2!}\log^2 T + \ldots\right) = M_k T^k,$$

er nach (38)

$$\left|\int_1^T \bar{R}(v)dv\right| < M_k T^{2k}.$$

Da nun dies für $0 < k < 1$ gilt, so ist für beliebig kleines $\varepsilon > 0$ gen (34)

$$\int_0^T R(v)dv = \tfrac{7}{8}T + O(T^\varepsilon). \tag{9}$$

Bis jetzt ist beim Beweise die Riemannsche Vermutung als wahr genommen worden; wir wollen nun sehen, ob für das letzte Resultat ese Annahme auch wesentlich ist.

Setzen wir

$$\varrho = \tfrac{1}{2} - \alpha + \gamma i,$$

daß immer

$$-\tfrac{1}{2} < \alpha < \tfrac{1}{2}$$

t, so geht die linke Seite der Gleichung (29) über in

$$e^{\frac{1}{2}z}\sum_{\gamma>0} e^{(-\alpha+i\gamma)z},$$

d nach der Substitution $z = is$ erhalten wir an Stelle der linken Seite n (30)

$$\sum_{\gamma>0} e^{-(\gamma+\alpha i)s}$$

Da die Werte $\varrho = \beta + \gamma i$ zur Geraden $\beta = \frac{1}{2}$ symmetrisch liegen, so dieser Ausdruck für reelle $s > 0$ selbst reell und positiv; es wird also e bei (30) auch hier $\eta_1 = 0$ sein müssen, und es ergibt sich

$$\text{1a)}\quad \sum_{\gamma>0} e^{-(\gamma+\alpha i)s} = -\frac{C + \log 2\pi s}{2\pi s} + \tfrac{7}{8} + s p_4(s)\log s + s p_3(s).$$

Es sei jetzt die Funktion $n(v)$ der komplexen Veränderlichen $v = u + wi$ der folgenden Weise definiert:

$$n(v) = n(u + wi) = \text{Anzahl der } \varrho,$$

lche den Bedingungen

$$\gamma < u \quad \text{oder} \quad \begin{cases} \gamma = u \\ \alpha \leqq w \end{cases} \quad \text{genügen.}$$

Für jedes reelle v, das von den γ verschieden ist, stimmt $n(v)$ mit r gewöhnlichen Funktion $N(v)$ überein.

Setzen wir

$$v_\nu = \gamma_\nu + \alpha_\nu i, \qquad \nu = 1, 2, \ldots,$$

wo die v_ν erst nach wachsenden γ_ν, die v_ν mit gleichem γ_ν aber nach wachsendem α_ν geordnet sind, *und wo jedes $\gamma_\nu + \alpha_\nu i$ von seiner Vielfachheit abgesehen nur einmal gezählt wird*, so läßt sich die linke Seite von (31a) auch schreiben

$$(32a) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} [n(v_\nu) - n(v_{\nu-1})]\, e^{-v_\nu s} = \sum_{\nu=1}^{\infty} n(v_\nu)\,(e^{-v_\nu s} - e^{-v_{\nu+1} s}) =$$

$$= s \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{v_\nu}^{v_{\nu+1}} n(v) e^{-vs}\, dv = s \int_W n(v) e^{-vs}\, dv,$$

wo das Integral rechts über den Weg W zu erstrecken ist, das aus den geradlinigen Strecken $(0, \gamma_1 - \frac{1}{2}i)$, $(\gamma_1 - \frac{1}{2}i, \gamma_1 + \frac{1}{2}i), \ldots, (\gamma_{\nu-1} + \frac{1}{2}i, \gamma_\nu - \frac{1}{2}i)$, $(\gamma_\nu - \frac{1}{2}i, \gamma_\nu + \frac{1}{2}i), \ldots$ zusammengesetzt ist. Durch eine leichte Anwendung des Cauchyschen Satzes ergibt sich nun

$$s \int_W \frac{v}{2\pi}\left(\log \frac{v}{2\pi} - 1\right) e^{-vs}\, dv = -\frac{C + \log 2\pi s}{2\pi s},$$

und wir erhalten wegen (31a) und (32a)

$$(35a) \qquad \int_W \left[n(v) - \frac{v}{2\pi}\left(\log \frac{v}{2\pi} - 1\right) - \frac{7}{8}\right] e^{-vs}\, dv = p_4(s) \log s + p_3(s).$$

Genau wie oben läßt sich nun hieraus ableiten, daß die Funktion von s

$$\int_W v^{-k}\left[n(v) - \frac{v}{2\pi}\left(\log \frac{v}{2\pi} - 1\right) - \frac{7}{8}\right] e^{-vs}\, dv, \qquad (0 < k \leqq 1)$$

eine Lipschitzsche Ungleichung im Sinne von (36) befriedigt. Es liegt nun hier ein Integral der Form

$$\int a(v) e^{-vs}\, dv$$

mit $\lim_{v \to \infty} a(v) = 0$ vor, das aber nicht längs der reellen Achse, sondern über den Weg W genommen ist. Der oben angeführte Satz von M. Riesz läßt sich also nicht unmittelbar anwenden, kann aber ohne Schwierigkeit so abgeändert werden, daß er auch diesen Fall umfaßt.

In der Tat haben wir schon im ersten Abschnitt dieses Kapitels den Rieszschen Konvergenzsatz aus Acta Math. 40 dahin abgeändert, daß er auch eine gewisse Dirichletsche Reihe mit komplexen Exponenten, deren imaginäre Teile aber beschränkt sind, nämlich die Reihe $\sum_{\gamma > 0} \varrho^{-k} e^{-(\gamma + \alpha i)s}$ umfaßt. Die jetzt erforderliche Abänderung ist nun jener ganz analog

dem es hier verlangt wird, den für Integrale $\int a(v)e^{-vs}dv$ längs der ellen Achse gültigen Satz dahin zu verallgemeinern, daß er auch für wisse Integrale über den Weg W, dessen Abstand von der reellen Achse schränkt ist, gilt. Es läßt sich dies auch mit genau denselben Mitteln reichen. Das Glied J_1 der Fußnote [18]) läßt sich nämlich sowohl als tegral über den Weg W, als auch in der Form $\int_0^\infty a_1(v)e^{-vs}dv$ darstellen d kann auch hier wie eine Fouriersche Reihe behandelt werden. Das ied J_2 aber, das im Ursprung regulär ist, nimmt hier die Form $_2(v)e^{-vs}$ an, und seine Konvergenz für $s=0$ können wir Wort für ort wie in dem Abschnitt I beweisen, wenn wir nur überall die Summen rch Integrale ersetzen. Es ergibt sich also die Konvergenz von

$$\int_W v^{-k}\left[n(v)-\frac{v}{2\pi}\left(\log\frac{v}{2\pi}-1\right)-\frac{7}{8}\right]dv.$$

Auf dem Wege W gilt nun

$$n(v)=n(u+wi)=N(u)+O(\log u)=\frac{u}{2\pi}\left(\log\frac{u}{2\pi}-1\right)+O(\log u),$$

$$\frac{v}{2\pi}\left(\log\frac{v}{2\pi}-1\right)=\frac{u}{2\pi}\left(\log\frac{u}{2\pi}-1\right)+\frac{wi}{2\pi}\log\frac{u}{2\pi}+O\left(\frac{1}{u}\right),$$

$$v^{-k}=u^{-k}+O(u^{-k-1}).$$

Also konvergiert auch

$$\int_W u^{-k}\left[n(v)-\frac{u}{2\pi}\left(\log\frac{u}{2\pi}-1\right)+\frac{wi}{2\pi}\log\frac{u}{2\pi}-\frac{7}{8}\right]dv.$$

Wir behaupten nun, daß der reelle Teil von diesem Integral sich nur eine unbedingt konvergente Reihe von dem Integral

$$\int_0^\infty u^{-k}\bar{R}(u)du$$

terscheidet, so daß auch dieses Integral konvergiert.

Der Weg W setzt sich nämlich aus schrägen und senkrechten Strecken ammen, und das Integral (40), über eine der senkrechten Strecken ommen, hat den reellen Teil Null. Es sei nun $(\gamma_\nu+\frac{1}{2}i,\ \gamma_{\nu+1}-\frac{1}{2}i)$ e beliebige der schrägen Strecken; dann gilt

$$\left[\int_{\gamma_\nu+\frac{1}{2}i}^{\gamma_{\nu+1}-\frac{1}{2}i}u^{-k}wi\log\frac{u}{2\pi}dv\right]=\gamma_\nu^{-k}\log\frac{\gamma_\nu}{2\pi}\Re\left[i\int_{\gamma_\nu+\frac{1}{2}i}^{\gamma_{\nu+1}-\frac{1}{2}i}w\,dv\right]+O(\gamma_\nu^{-k-1}\log\gamma_\nu)=$$

$$=\gamma_\nu^{-k}\log\frac{\gamma_\nu}{2\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}w\,dw+O(\gamma_\nu^{-k-1}\log\gamma_\nu)=O(\gamma_\nu^{-k-1}\log\gamma_\nu),$$

was unbedingt konvergent ist, wenn über alle ν summiert wird, und

$$\Re\left\{\int_{\gamma_\nu+\frac{1}{2}i}^{\gamma_{\nu+1}-\frac{1}{2}i} u^{-k}\left[n(v)-\frac{u}{2\pi}\left(\log\frac{u}{2\pi}-1\right)-\frac{7}{8}\right]dv\right\}=\int_{\gamma_\nu}^{\gamma_{\nu+1}} u^{-k}\,\overline{R}(u)\,du.$$

Die Summe aller solcher den schrägen Strecken zugehörenden Integrale, d. h. eben

$$\int_0^\infty u^{-k}\,\overline{R}(u)\,du,$$

muß also konvergent sein. Hieraus kann man nun genau wie oben die Gleichung (39) wieder ableiten, so daß also der Mittelwertsatz

$$\int_0^T R(v)\,dv=\tfrac{7}{8}T+O(T^\varepsilon)$$

für jedes $\varepsilon>0$ auch in diesem Fall richtig ist. Dieser Satz ist also von der Richtigkeit oder Unrichtigkeit der Riemannschen Vermutung unabhängig.

Stocksund bei Stockholm, den 8. September 1918.

(Eingegangen am 28. September 1918.)

Nachtrag.

Während der Drucklegung dieser Abhandlung richtete Herr Professor E. Lindelöf freundlichst meine Aufmerksamkeit auf die Arbeit „Über die Nullstellen der Zetafunktion“ von Hj. Mellin (Annales Academiæ Scientiarium Fennicæ, Serie A, Bd. 10, (1917), Nr. 11). Es kommen dort einige zur Gleichung (28) der vorliegenden Arbeit analogen Formeln vor, und zwar wird — in etwas veränderter Bezeichnung — die Beziehung

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{\gamma>0}\varrho^{-\varepsilon}\cos\gamma x=\frac{e^{\frac{3}{4}x}-e^{-\frac{3}{4}x}\mp e^{\mp\frac{1}{4}x}}{2(e^x-e^{-x})}$$

hergeleitet. Diese Gleichung läßt wie meine Gleichung (28) die Primzahlen nicht explizit auftreten, fällt aber nicht mit ihr zusammen.

Über streckentreue und winkeltreue Abbildung.

Von

Hans Rademacher in Wickersdorf (Thüringen).

Von Herrn H. Bohr ist kürzlich bewiesen worden, daß jede ein-
ıdeutige und streckentreue Abbildung eines Gebietes konform ist[1]).
rner hat früher Herr R. Remak die Frage aufgeworfen, ob jede winkel-
eue Abbildung konform sei, und hat unter einschränkenden Voraus-
zungen einen Teil dieser Frage bejahend beantwortet[2]). Ein von mir
uerdings bewiesener Satz über die partielle und totale Differenzierbarkeit
n Funktionen mehrerer Variabeln ermöglicht es nun, den Bohrschen
tz aufs neue zu beweisen und auch das Problem der winkeltreuen Ab-
ıdung ein merkliches Stück zu fördern. Zugleich wird in der vorliegenden
beit das gegenseitige methodische Verhältnis der beiden Probleme da-
rch hervortreten, daß wir beide mit den gleichen Hilfsmitteln behandeln.

I. Voraussetzungen und Hilfsmittel.

Wir erinnern zunächst an die Definitionen von „Winkeltreue" und
treckentreue". In dem beschränkten Gebiet G der Ebene der Variabeln
$= x + iy$ sei die komplexe Funktion $\zeta = f(z)$ definiert. Die durch diese
nktion vermittelte Abbildung des Gebietes G auf einen Bereich der
ene der Variabeln $\zeta = \xi + i\eta$ heiße *winkeltreu*, wenn zu jedem z in G

[1]) Vgl. H. Bohr, Über streckentreue und konforme Abbildung, Math. Zeitrift Bd. I (1918), S. 403—420.

[2]) Vgl. R. Remak, Über winkeltreue und streckentreue Abbildung an einem nkte und in der Ebene, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 38 (1914), 193—246. Die winkeltreue Abbildung eines Gebietes behandelt Herr Remak statt er der Voraussetzung (1) nur unter der Bedingung der Existenz des „erweiterten numdifferentialquotienten"

$$\lim_{l_1 \to 0,\ l_2 \to 0} \frac{\operatorname{sign}\left(f(z+l_1) - f(z+l_2)\right)}{\operatorname{sign}\,(l_1 - l_2)} = p(z)$$

l einer komplizierten Bedingung für die Konvergenzgeschwindigkeit dieses Limes.

$$(1) \qquad \lim_{l \to 0} \frac{\operatorname{sign}(f(z+l)-f(z))}{\operatorname{sign} l} = p(z)$$

existiert, wo $l = h + ik$ komplex sein soll und unter „signum von u“ dabei

$$\operatorname{sign} u = \frac{u}{|u|}$$

verstanden wird, was nur für $|u| > 0$ definiert ist. Die Abbildung heiße *streckentreu*, wenn zu jedem z in G

$$(2) \qquad \lim_{l \to 0} \frac{|f(z+l)-f(z)|}{|l|} = q(z)$$

als endliche Zahl existiert.

Es sei nun $\varphi(x, y)$ eine in G definierte *reelle* Funktion von x und y. Wir bilden

$$(3) \qquad w_\varphi(x, y; \varrho) = \text{obere Grenze von } \frac{|\varphi(x+h, y+k)-\varphi(x, y)|}{\sqrt{h^2+k^2}},$$
$$0 < h^2+k^2 \leqq \varrho^2$$

wo h und k hier wie im folgenden reelle Zahlen seien. Mit abnehmendem ϱ kann $w_\varphi(x, y; \varrho)$ nicht wachsen. Es existiert also

$$(4) \qquad L_\varphi(x, y) = \lim_{\varrho = 0} w_\varphi(x, y; \varrho)$$

als eine Funktion von (x, y), die auch unendlich sein kann. Die Endlichkeit von $L_\varphi(x, y)$ in einem Punkte impliziert dort offenbar die Stetigkeit von $\varphi(x, y)$. Nun gilt der folgende

Satz A: *Ist in dem beschränkten Gebiet G der xy-Ebene eine reelle Funktion $\varphi(x, y)$ definiert, für welche $L_\varphi(x, y)$ in G endlich und summierbar ist, so ist $\varphi(x, y)$ in einem maßgleichen Kern E_0 von G total differenzierbar im Stolzschen Sinne, d. h. es existieren in E_0 die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, und es ist dort*

$$(5) \qquad \varphi(x+h, y+k) = \varphi(x, y) + h\frac{\partial \varphi}{\partial x} + k\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \sqrt{h^2+k^2}\, R(h, k),$$

worin $R(h, h) \to 0$ gleichmäßig mit $h^2 + k^2 \to 0$ [3]).

Wir benötigen ferner den folgenden

Satz B: *Ist in G eine komplexe Funktion $\zeta = f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ definiert mit endlichen und in G summierbaren Funktionen L_φ und L_ψ, die gemäß (3) und (4) gebildet sind, und genügen die φ*

[3]) Siehe meine demnächst in den Mathematischen Annalen erscheinende Arbeit „Über partielle und totale Differenzierbarkeit und über die Transformation der Doppelintegrale“, Satz I

em maßgleichen Kern E_1 von G existierenden partiellen Ableitungen E_1 den Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

ist $\zeta = f(z)$ eine in G reguläre analytische Funktion[4]).

Daß die partiellen Ableitungen unter der Voraussetzung des Satzes B einem maßgleichen Kern von G existieren, sagt schon der vorige z aus. Unter den Zeichen $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ usw. mögen im folgenden Beweise in Nullmenge, wo die Ableitungen etwa nicht existieren, die vorderen ren Derivierten verstanden werden. Es sei C der Rand und R die che eines beliebigen in G liegenden Rechtecks

$$x_1 \leqq x \leqq x_2, \qquad y_1 \leqq y \leqq y_2.$$

nn ist

$$\int_C f'(z)\,dz = \int_C (\varphi + i\psi)(dx + i\,dy)$$
$$= \int_C (\varphi\,dx - \psi\,dy) + i\int_C \psi\,dx + \varphi\,dy.$$

n existiert das Integral

$$\iint_R \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dx\,dy,$$

n es ist

$$\text{ere Grenze}_{0<|k|\leqq\varrho} \frac{|\varphi(x,y+k)-\varphi(x,y)|}{|k|} \leqq \text{obere Grenze}_{0<\sqrt{h^2+k^2}\leqq\varrho} \frac{|\varphi(x+h,y+k)-\varphi(x,y)|}{\sqrt{h^2+k^2}},$$

o für $\varrho \to 0$

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right| \leqq L_\varphi(x,y),$$

mit die Endlichkeit und Summierbarkeit von $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ in G und a fortiori in erwiesen ist. Nach einem Satze von G. Fubini[5]) existiert dann, außer einer linearen Nullmenge des Intervalls $x_1 \leqq x \leqq x_2$, das Integral

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y}\,dy,$$

[4]) Dieser Satz findet sich schon, in etwas allgemeinerer Fassung, in der mir t rechtzeitig bekannt gewordenen Arbeit von Herrn Ch. J. de la Vallée Poussin, luction des intégrales doubles de Lebesgue. Application à la définition des fonctions lytiques, Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (Sciences) 1910, S. 768—798. merkung bei der Korrektur.)

[5]) Sugli integrali multipli, Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei (5) 16, I 07), S. 608—614; vgl. auch C. Carathéodory, Reelle Funktionen, Leipzig 1918, 32, Satz 4.

und es ist, wenn man diesem Integral auf der linearen Nullmenge der x, wo es etwa nicht existiert, einen beliebigen Wert beilegt,

$$\iint_R \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dx\, dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y}\, dy.$$

Überall, wo (8) existiert, ist ferner wegen der Endlichkeit der vorderen oberen Derivierten $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ und wegen der Stetigkeit von φ

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y}\, dy = \varphi(x, y_2) - \varphi(x, y_1)\ ^{6}),$$

und somit

$$\iint_R \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dx\, dy = \int_{x_1}^{x_2} [\varphi(x, y_2) - \varphi(x, y_1)]\, dx = -\int_c \varphi\, dx,$$

das letzte Integral hierbei im positiven Sinne um das Rechteck herum erstreckt. Die analogen Umformungen für die anderen Ableitungen lassen aus (7) hervorgehen

$$\int_c f(z)\, dz = -\iint_R \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dx\, dy + i \iint_R \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

und da, außer höchstens in einer Nullmenge, (6) gilt, so folgt

$$\int_c f(z)\, dz = 0$$

für jeden achsenparallelen Rechtecksrand C in G. Also ist zufolge des Moreraschen Satzes, da $f(z)$ wegen der Endlichkeit von L_φ und L_ψ in G stetig ist, der Hilfssatz bewiesen.

II. Winkeltreue Abbildung.

Es genüge die in G definierte komplexe Funktion $\zeta = f(z)$ der Gleichung (1), d. h. sie bilde G *winkeltreu* ab. Wir bilden hier

$$w_f(z; \varrho) = \text{obere Grenze}_{0 = |l| \leq \varrho} \frac{|f(z+l) - f(z)|}{|l|} \qquad (l \text{ komplex})$$

und dazu

$$L_f(z) = \lim_{\varrho \to 0} w_f(z; \varrho).$$

$L_f(z)$ kann als Maß für die größte „Streckung" der Abbildung im Punkte z angesehen werden; es möge $L_f(z)$ danach die „Streckungsfunktion" heißen. Setzen wir

$$(9) \qquad f(z) = f(x+iy) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y),$$

---

[6]) C. Carathéodory, l. c. [5]), S. 597, Satz 4.

ist

$$w_\varphi(x, y; \varrho) = \underset{0<\sqrt{h^2+k^2}\leqq\varrho}{\text{obere Grenze}} \frac{|\varphi(x+h, y+k)-\varphi(x,y)|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\leqq \underset{0<|l|\leqq\varrho}{\text{obere Grenze}} \frac{|f(z+l)-f(z)|}{|l|} = w_f(z; \varrho),$$

rin $$l = h + ik.$$

her haben wir

$$L_\varphi(x, y) \leqq L_f(z)$$

d ebenso

$$L_\psi(x, y) \leqq L_f(z).$$

n $L_f(z)$ setzen wir nun voraus, daß es in G *endlich* und *summierbar* . Dann kommen auch den L_φ und L_ψ diese Eigenschaften zu, und an kann auf φ und ψ Satz A anwenden.

Gleichung (1) formen wir durch (9) um in

$$\lim_{0,\ k\to 0} \frac{\operatorname{sign}\left[\varphi(x+h, y+k)-\varphi(x,y)+i\left(\psi(x+h, y+k)-\psi(x,y)\right)\right]}{\operatorname{sign}(h+ik)} = p(z).$$

liege nun z in dem maßgleichen Kern E_1 von G, in dem φ und ψ gleich total differenzierbar sind. Dann ergibt die Anwendung von (5), chdem wir noch $h = at$, $k = bt$ gesetzt haben, wo $t > 0$ und a, b gendein reelles Zahlenpaar sei, das beim Grenzübergang festbleibt,

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{\operatorname{sign}(at+ibt)} \operatorname{sign}\Big[at\frac{\partial\varphi}{\partial x} + b\frac{\partial\varphi}{\partial y} + t\sqrt{a^2+b^2}\,R_1(at, bt)$$

$$+ i\Big(at\frac{\partial\psi}{\partial x} + bt\frac{\partial\psi}{\partial y} + t\sqrt{a^2+b^2}\,R_2(at, bt)\Big)\Big] = p(z).$$

mäß der Definition von signum kann man t im Zähler und Nenner tlassen und dann zum Limes übergehen:

$$\frac{\operatorname{sign}\left[a\frac{\partial\varphi}{\partial x} + b\frac{\partial\varphi}{\partial y} + i\left(a\frac{\partial\psi}{\partial x} + b\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right]}{\operatorname{sign}(a+ib)} = p(z).$$

Dieser Grenzübergang ist wegen der Definition von signum freilich r erlaubt, wenn die Klammer im Zähler nicht verschwindet. Sind aber e vier Ableitungen gleich Null, so sind die Gleichungen (6) ohnehin üllt. Verschwindet aber mindestens eine Ableitung nicht, so braucht s Wertepaar a, b höchstens eine einparametrige Schar auszulassen, um s Nullwerden der Klammer zu verhüten. Dann setzen wir

$$p(z) = r + is$$

d schreiben unter Benutzung der Abkürzungen $\varphi_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ usw.

$$\operatorname{sign}[a\varphi_x + b\varphi_y + i(a\psi_x + b\psi_y)] = \operatorname{sign}[ar - bs + i(as + br)].$$

Diese Gleichung kann nur gelten, wenn

$$(a\varphi_x + b\varphi_y) : (a\psi_x + b\psi_y) = (ar - bs) : (as + br),$$

oder

$$(a\varphi_x + b\varphi_y)(as + br) = (a\psi_x + b\psi_y)(ar - bs)$$

ist. Da a, b abgesehen von der obigen Einschränkung beliebige reelle Zahlen waren, muß diese Gleichung in a, b identisch erfüllt sein. Durch Koeffizientenvergleichung gelangt man zu

$$\varphi_x s = \psi_x r, \qquad \varphi_y r = -\psi_y s, \tag{10}$$

$$\varphi_x r + \varphi_y s = -\psi_x s + \psi_y r. \tag{11}$$

Multiplikation von (10) mit r und (11) mit s und Einsetzung aus (10) in (11) ergibt

$$\psi_x r^2 + \varphi_y s^2 = -\psi_x s^2 - \varphi_y r^2,$$

$$\varphi_y (s^2 + r^2) = -\psi_x (s^2 + r^2)$$

und wegen

$$r^2 + s^2 = |p(z)|^2 = 1$$

$$\varphi_y = -\psi_x. \tag{12a}$$

Multipliziert man (10) mit s und (11) mit r und verfährt sonst ebenso, so entsteht

$$\varphi_x r^2 - \psi_y s^2 = -\varphi_x s^2 + \psi_y r^2,$$

$$\varphi_x (r^2 + s^2) = \psi_y (r^2 + s^2),$$

$$\varphi_x = \psi_y. \tag{12b}$$

Die Gleichungen (12) sind aber mit (6) identisch; diese sind also in dem maßgleichen Kern E_1 von G erfüllt, so daß die Anwendung des Satzes B ergibt, daß $f(z)$ in G regulär ist. Da ferner durch (1) die Möglichkeit $f'(z) = 0$ ausgeschlossen wird, wie man durch Entwicklung von $f(z+l) - f(z)$ nach Potenzen von l leicht feststellt, so haben wir den

Satz I: *Eine durch die komplexe Funktion $\zeta = f(z)$ vermittelte winkeltreue Abbildung eines beschränkten Gebietes G der z-Ebene auf einen Bereich Γ der ζ-Ebene ist konform, wenn die durch*

$$w_f(z; \varrho) = \text{obere Grenze}_{0 < |l| \leq \varrho} \frac{|f(z+l) - f(z)|}{|l|}, \qquad (l \text{ komplex})$$

$$L_f(z) = \lim_{\varrho \to 0} w_f(z; \varrho)$$

definierte Streckungsfunktion $L_f(z)$ in G endlich und summierbar ist.

Eineindeutigkeit der Abbildung ist nicht vorausgesetzt.

III. Streckentreue Abbildung.

Die in G definierte Funktion $\zeta = f(z)$ vermittele eine *eineindeutige* d *streckentreue* Abbildung auf das beschränkte Gebiet Γ der ζ-Ebene[7]). rner soll durch diese Abbildung der *Umlaufssinn aufrechterhalten* iben, was offenbar keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet.

Wir setzen zunächst wieder $L_f(z)$ als *endlich* und in G *summierbar* raus. Die Umformung von (2) durch (9) ergibt nach dem Quadrieren der Seiten:

$$\lim_{h\to 0,\, k\to 0} \frac{[\varphi(x+h, y+k)-\varphi(x,y)]^2+[\psi(x+h, y+k)-\psi(x,y)]^2}{h^2+k^2} = q^2(z).$$

Es liege z in dem maßgleichen Kern E_1 von G, in dem φ und ψ al differenzierbar sind. Setzen wir wieder $h = at$, $k = bt$, wo $t > 0$ d a, b ein beliebiges reelles Zahlenpaar ist, das beim Grenzübergang fest ibt, so ergibt die Anwendung von (5)

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2(a^2+b^2)} \{[at\varphi_x + bt\varphi_y + t\sqrt{a^2+b^2}R_1(at, bt)]^2$$
$$+ [at\psi_x + bt\psi_y + t\sqrt{a^2+b^2}R_2(at, bt)]^2\} = q^2(z)$$

d nach dem Kürzen des Bruches durch t^2 und der Ausführung des enzüberganges

$$[a\varphi_x + b\varphi_y]^2 + [a\psi_x + b\psi_y]^2 = q^2a^2 + q^2b^2.$$

Diese Gleichung muß wieder identisch in a, b erfüllt sein. Daher:

$$\varphi_x^2 + \psi_x^2 = \varphi_y^2 + \psi_y^2 = q^2,$$
$$2\varphi_x\varphi_y + 2\psi_x\psi_y = 0.$$

Unter Einführung des Imaginären kann man diese Gleichungen gendermaßen zusammenfassen:

$$\varphi_x^2 + 2i\varphi_x\varphi_y - \varphi_y^2 = \psi_y^2 - 2i\psi_x\psi_y - \psi_x^2$$
$$\varphi_x + i\varphi_y = \pm(\psi_y - i\psi_x),$$
$$\varphi_x = \pm\psi_y, \quad \varphi_y = \mp\psi_x.$$

Die Vorzeichen bestimmen wir durch die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} = \pm(\psi_y^2 + \psi_x^2) = \pm(\varphi_x^2 + \psi_x^2) = \pm q^2.$$

Ist $q = 0$, so verschwinden wegen (13) sämtliche Ableitungen und illen dann also gewiß (6). Ist $q > 0$, so muß die dann nicht-ver-

[7]) Es liegt keine wesentliche Einschränkung in der Voraussetzung eines beränkten Γ, denn wegen (2) wird jede hinreichend kleine Umgebung eines Punktes ein beschränktes Gebiet abgebildet, und G läßt sich mit solchen Umgebungen ählbar vieler Punkte überdecken.

schwindende *Funktionaldeterminante* in E_1 *positiv* sein, da der Umlaufungssinn aufrechterhalten werden soll[8]). Also ist

$$\varphi_x = +\psi_y, \quad \varphi_y = -\psi_x$$

in dem maßgleichen Kern E_1 von G, und der Satz B sagt dann aus, daß $f(z)$ analytisch und regulär in G ist. Ferner kann wegen der vorausgesetzten Eineindeutigkeit $f'(z) = 0$ in G nicht stattfinden, so daß also die durch $\zeta = f(z)$ geleistete Abbildung in G ausnahmslos *konform* ist.

Endlich ist hier, wie ein Vergleich der Definitionen sofort lehrt,

$$L_f(z) = q(z). \tag{14}$$

Nach einer schönen Schlußweise von Herrn Bohr ist aber $q(z)$ in G summierbar. Denn offenbar ist $q^2(z)$ das Vergrößerungsverhältnis der Abbildung im Punkte z. Daher ist

$$\iint_G q^2 \, d\omega = m\Gamma,$$

$$2\iint_G q \, d\omega \leqq \iint_G (1 + q^2) \, d\omega = mG + m\Gamma,$$

was die behauptete Summierbarkeit von q einschließt[9]). *Wegen* (14) *erübrigt sich also bei der streckentreuen Abbildung unsere besondere Voraussetzung über* $L_f(z)$. Damit haben wir den Bohrschen Satz wiedergewonnen.

Satz II: *Jede eineindeutige streckentreue Abbildung eines beschränkten Gebietes* G *auf ein beschränktes Gebiet* Γ *ist konform.*

---

[8]) Siehe l. c.[3]) Satz IV.

[9]) Vgl. l. c.[1]) S. 415f. (wo $g(z)$ für unser $q(z)$ geschrieben ist). Daß $q^2(z)$ das Vergrößerungsverhältnis wenigstens für die Punkte von E_1 darstellt, ergibt auch Satz III l. c.[3]) wegen $q^2 = \dfrac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)}$.

(Eingegangen am 12. Oktober 1918.)

Über Orthogonalsysteme von Polynomen.

Von

G. Szegö in Budapest.

Es sei $P_n(x)$ das n-te Legendresche Polynom, d. h. das Polynom ten Grades, definiert durch die Bedingungen

$$P_n(1)=1, \quad \int_{-1}^{1} P_n(x)\,x^r\,dx=0 \quad (0\leqq r<n;\ n\geqq 1).$$

nn ist bekanntlich

$$|P_n(x)|<1 \qquad (|x|<1;\ n\geqq 1).$$

meiner Arbeit, „Ein Beitrag zur Theorie der Polynome von Laguerre d Jacobi“[1]), habe ich versucht, eine analoge Eigenschaft für andere hlbekannte Polynomklassen nachzuweisen. Mein Ausgangspunkt war entlich eine Vermutung von Herrn I. Schur über spezielle Jacobische lynome[2]), eine Vermutung, die ich dort zwar nicht erledigen konnte, aber doch zu einigen merkwürdigen Sätzen führte. Ich bewies (mit igen Abänderungen der dort gebrauchten Bezeichnungsweise) folgendes:

Es sei $L_n(\zeta)$ das Polynom n-ten Grades, definiert durch die Bedingungen

$$L_n(0)=1, \quad \int_0^{\infty} e^{-\zeta}\,L_n(\zeta)\,\zeta^r\,d\zeta=0 \quad (0\leqq r<n;\ n\geqq 1)$$

aguerresche Polynome)[3]), *dann ist*

$$e^{-\frac{\zeta}{2}}\,|L_n(\zeta)|<1 \qquad (\zeta>0;\ n\geqq 1).$$

Ferner:

Es sei $\varkappa$ positiv und ganz, $\Pi_n^{(\varkappa)}(x)$ das Polynom n-ten Grades, iniert durch die Bedingungen

[1]) Mathematische Zeitschrift Bd. 1 (1918), Heft 4, S. 341—356.

[2]) L. c.[1]) S. 351.

[3]) Laguerre, Werke, Bd. I, S. 436.

$$(5) \qquad H_n^{(\varkappa)}(1) = 1 \qquad \int_0^1 x^{\varkappa+r} H_n^{(\varkappa)}(x)\,dx = 0 \qquad (0 \leqq r < n;\ n \geqq 1)$$

(*spezielle Jacobische Polynome*)[4]), *dann ist*

$$x^{\frac{\varkappa}{2}} |H_n^{(\varkappa)}(x)| < 1 \qquad (0 \leqq x < 1;\ n \geqq 1).$$

Alle diese Polynome bilden einen Spezialfall von Polynomen, die in ihrer vollen Allgemeinheit zuerst in der Theorie der Stieltjesschen Kettenbrüche[5]) aufgetreten sind, als Näherungsnenner derselben. Diese Polynome können folgendermaßen charakterisiert werden:

Es sei $f(x)$ für alle x nichtnegativ, $n \geqq 1$; es sei das Integral[6])

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) x^{\nu}\,dx$$

für $0 \leqq \nu \leqq 2n-1$ endlich, für $\nu = 0$ positiv. Dann wird durch die Bedingungen

$$(7) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) A_n(x) x^r\,dx = 0 \qquad (0 \leqq r < n)$$

ein nicht identisch verschwindendes Polynom n-ten (und nicht niedrigeren) Grades $A_n(x)$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.

Ist nun $f(x) = 0$ für $x > \beta$ (β ist endlich), so gilt folgender Satz:

Die Wurzeln von $A_n(x)$ sind alle reell, voneinander verschieden und $< \beta$.

Beweis s. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig 1913, S. 368, Hilfssatz 3.

Daraus folgt, daß diese Polynome so normiert werden können, daß

$$(7') \qquad A_n(\beta) = 1$$

sei. Durch (7) und (7') ist $A_n(x)$ *eindeutig* bestimmt.

Ist z. B. $f(x) = 0$ für $|x| > 1$, $f(x) = 1$ für $|x| \leqq 1$, so ist $\beta = 1$ und

$$A_n(x) = P_n(x).$$

Ist $f(x) = 0$ für $x > 0$, $f(x) = e^x$ für $x \leqq 0$, so ist $\beta = 0$ und

$$A_n(x) = L_n(-x).$$

---

[4]) C. Jordan, Cours d'Analyse, Zweite Auflage, Paris 1896 (Gauthier-Villars), Bd. 3, S. 231–233.

[5]) S. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig und Berlin 1913 (B. G. Teubner), S. 379.

[6]) Alle Integrale sind im Riemannschen Sinne zu nehmen.

Ist $f(x)=0$ für $x<0$ und $x>1$, $f(x)=x^{\varkappa}$ für $0\leqq x\leqq 1$ ($\varkappa$ ist itiv und ganz), so ist $\beta=1$ und

$$A_n(x)=\Pi_n^{(\varkappa)}(x).$$

Der Zweck dieser Arbeit ist nun, folgendes Theorem zu beweisen:

A. *Es sei $f(x)$ eine für $x\leqq\beta$ (β ist endlich) definierte, nichtnegative chsende Funktion*[7]*), $n\geqq 1$ und das Integral*

$$\int_{-\infty}^{\beta} f(x)x^{\nu}\,dx$$

$0\leqq\nu\leqq 2n-1$ *endlich, für $\nu=0$ positiv. Es sei ferner das Polynom ien Grades, $A_n(x)$ durch folgende Bedingungen definiert:*

$$A_n(\beta)=1,\quad \int_{-\infty}^{\beta} f(x)A_n(x)x^{r}\,dx=0 \qquad (0\leqq r<n).$$

nn ist

$$\sqrt{\frac{f(x)}{f(\beta)}}\,|A_n(x)|\leqq 1 \qquad (x\leqq\beta)^{8}).$$

Der Inhalt dieses Satzes ist folgender. Ich betrachte das Funktionen-tem

$$\sqrt{f(x)},\quad \sqrt{f(x)}\,x,\ \ldots,\ \sqrt{f(x)}\,x^n$$

$x\leqq\beta$ und bilde daraus nach dem Verfahren von E. Schmidt durch hogonalisierung das System

$$\sqrt{f(x)}\,B_0(x),\quad \sqrt{f(x)}\,B_1(x),\ \ldots,\ \sqrt{f(x)}\,B_n(x),$$

die $B_\nu(x)$ nicht identisch verschwinden und folgende Bedingungen illen:

a) $B_\nu(x)$ ist ein Polynom ν-ten Grades,

b) $\int_{-\infty}^{\beta} f(x)B_\mu(x)B_\nu(x)\,dx=0 \qquad (\mu\gtrless\nu;\ 0\leqq\mu,\nu\leqq n)$;

an nimmt die Funktion

$$\sqrt{f(x)}\,|B_\nu(x)| \qquad (0\leqq\nu\leqq n)$$

$x=\beta$ ihre obere Grenze im Intervall $x\leqq\beta$ an.

Ich beweise diesen Satz zuerst für stetig differenzierbare $f(x)$, dann gemein und gebe endlich einige Anwendungen.

---

[7]) D. h. $f(x_1)\leqq f(x_2)$ für $x_1\leqq x_2$.

[8]) Alle Quadratwurzeln sind positiv (nichtnegativ) zu nehmen.

§ 1.

Hilfssätze.

I. *Es seien die Bedingungen des Satzes* **A** *erfüllt,* $n \geqq 2$ *und*

$$A_n(x) = E(x)G(x)$$

irgendeine Zerlegung des Polynoms $A_n(x)$, *wo* $E(x)$ *ein Polynom* ν*-ten und* $G(x)$ *ein Polynom* $(n-\nu)$*-ten Grades ist* $(1 \leqq \nu \leqq n-1)$; *es sei ferner*

$$f^*(x) = f(x)[G(x)]^2,$$

dann ist

$$\int_{-\infty}^{\beta} f^*(x)E(x)x^r dx = 0 \qquad (0 \leqq r < \nu).$$

In der Tat ist

$$\int_{-\infty}^{\beta} f^*(x)E(x)x^r dx = \int_{-\infty}^{\beta} f(x)[G(x)]^2 E(x)x^r dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\beta} f(x)A_n(x)G(x)x^r dx = 0 \quad (0 \leqq r < \nu),$$

woraus die Behauptung folgt.

II. *Es sei* $n \geqq 1$ *und* $A_n(x)$ *ein beliebiges Polynom* n*-ten Grades mit lauter reellen Wurzeln. Ich bezeichne die kleinste unter diesen mit* $x_1^{(n)}$; *dann ist*

$$A_n(x)A_n'(x) < 0 \qquad (x < x_1^{(n)}).$$

Alle Wurzeln von $A_n(x)$ und $A_n'(x)$ sind nämlich $\geqq x_1^{(n)}$, also für $x < x_1^{(n)}$

$$\operatorname{sign} A_n(x)A_n'(x) = \operatorname{sign} A_n(-\infty)A_n'(-\infty) = -1,$$

q. e. d.

§ 2.

Beweis des Hauptsatzes.

Es sei zunächst $f(x)$ stetig differenzierbar, also laut Voraussetzung

$$f'(x) \geqq 0 \qquad (x \leqq \beta).$$

Ich bezeichne die Wurzeln von $A_n(x)$ mit

$$x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} < \beta.$$

Es sei x eine feste Stelle $\leqq \beta$. Dann sind drei Fälle möglich.

a) $x_n^{(n)} \leqq x \leqq \beta$.

Dann ist

$$0 \leqq A_n(x) \leqq A_n(\beta) = 1,$$

$$0 \leqq f(x) \leqq f(\beta),$$

$$\sqrt{f(x)}\,|A_n(x)| \leqq \sqrt{f(\beta)}, \qquad \text{q. e. d.}$$

b) $x < x_1^{(n)}$.

Dann ist

$$f(\beta)[A_n(\beta)]^2 - f(x)[A_n(x)]^2 = \int_x^\beta \frac{d}{dt}\{f(t)[A_n(t)]^2\}\,dt =$$

$$= \int_x^\beta f'(t)[A_n(t)]^2\,dt + 2\int_x^\beta f(t)\,A_n(t)\,A_n'(t)\,dt.$$

n ist

$$\int_x^\beta f'(t)[A_n(t)]^2\,dt \geqq 0,$$

ner

$$\int_x^\beta f(t)\,A_n(t)\,A_n'(t)\,dt = \int_{-\infty}^\beta f(t)\,A_n(t)\,A_n'(t)\,dt - \int_{-\infty}^x f(t)\,A_n(t)\,A_n'(t)\,dt =$$

$$= -\int_{-\infty}^x f(t)\,A_n(t)\,A_n'(t)\,dt \geqq 0,$$

il nach Hilfssatz II

$$A_n(t)\,A_n'(t) < 0 \qquad (t \leqq x < x_1^{(n)})$$

Also

$$f(\beta)[A_n(\beta)]^2 - f(x)[A_n(x)]^2 \geqq 0, \qquad \text{q. e. d.}$$

c) $x_{n-\nu}^{(n)} \leqq x < x_{n-\nu+1}^{(n)} \qquad (1 \leqq \nu < n;\ n \geqq 2).$

n setze im Hilfssatz I

$$G(t) = (t - x_1^{(n)})\,(t - x_2^{(n)}) \ldots (t - x_{n-\nu}^{(n)}),$$

$$E(t) = \frac{A_n(t)}{G(t)}$$

nn wächst die Funktion

$$f^*(t) = f(t)[G(t)]^2$$

$t \geqq x \geqq x_{n-\nu}^{(n)}$, d. h. es ist

$$f^{*\prime}(t)\,dt \geqq 0 \qquad (t \geqq x);$$

wie nach Hilfssatz II

$$E(t)\,E'(t) < 0 \qquad \left(t \leqq \quad < x_{n-\nu+1}^{(n)}\right),$$

daß ähnlich wie im Falle b)

$$f(\beta)[A_n(\beta)]^2 - f(x)[A_n(x)]^2 = f^*(\beta)[E(\beta)]^2 - f^*(x)[E(x)]^2 =$$

$$\int_x^\beta \frac{d}{dt}\{f^*(t)[E(t)]^2\}\,dt = \int_x^\beta f^{*\prime}(t)[E(t)]^2\,dt - 2\int_{-\infty}^x f^*(t)E(t)E'(t)\,dt \geqq 0,$$

q. e. d.

Damit ist der Satz **A** für stetig differenzierbare $f(x)$ bewiesen.

§ 3.

Fortsetzung.

Ich will jetzt beweisen, daß der Satz **A** allgemein gilt. Im Falle a) des vorigen Paragraphen ist das ohne weiteres klar. Die Behandlung von b) und c) fasse ich zusammen, indem ich im Falle b)

$$E(t) = A_n(t), \qquad G(t) = 1, \qquad f^*(t) = f(t)$$

setze. Ist nun

$$x = t_0^{(\mu)} < t_1^{(\mu)} < \ldots < t_{\mu-1}^{(\mu)} < t_\mu^{(\mu)} = \beta,$$

wo

$$\lim \operatorname{Max}\left(t_r^{(\mu)} - t_{r-1}^{(\mu)}\right) = 0 \qquad (1 \leqq r \leqq \mu$$

ist, so gilt zunächst folgende Umformung:

$$f(\beta)[A_n(\beta)]^2 - f(x)[A_n(x)]^2 = f^*(\beta)[E(\beta)]^2 - f^*(x)[E(x)]^2 =$$

$$= \sum_{r=1}^{\mu}\left\{f^*(t_r)[E(t_r)]^2 - f^*(t_{r-1})[E(t_{r-1})]^2\right\} =$$

$$= \sum_{r=1}^{\mu}\left\{f^*(t_r) - f^*(t_{r-1})\right\}[E(t_r)]^2 + \sum_{r=1}^{\mu} f^*(t_{r-1})\left\{[E(t_r)]^2 - [E(t_{r-1})]^2\right\}$$

wo der Kürze halber t_r statt $t_r^{(\mu)}$ geschrieben wird. Man hat aber

$$\sum_{r=1}^{\mu}\left\{f^*(t_r) - f^*(t_{r-1})\right\}[E(t_r)]^2 \geqq 0$$

und

$$\lim_{\mu=\infty} \sum_{r=1}^{\mu}\left\{f^*(t_r) - f^*(t_{r-1})\right\}[E(t_r)]^2 = \int_x^\beta [E(t)]^2 df^*(t),$$

wo das Integral im Stieltjesschen Sinne zu verstehen ist[9]); ferner

$$\frac{[E(t_r)]^2 - [E(t_{r-1})]^2}{t_r - t_{r-1}} = 2E(\tau_r)E'(\tau_r),$$

wo $t_{r-1} \leqq \tau_r \leqq t_r$ ist. Also gilt

$$\lim_{\mu=\infty} \sum_{r=1}^{\mu} f^*(t_{r-1})\left\{[E(t_r)]^2 - [E(t_{r-1})]^2\right\} = 2\int_x^\beta f^*(t)E(t)E'(t)dt =$$

$$= -2\int_{-\infty}^{x} f^*(t)E(t)E'(t)dt \geqq 0, \qquad \text{q. e.}$$

[9]) S. O. Perron, l. c. [5]) S. 363, Lemma 1 und Definition 1.

§ 4.

Bemerkungen.

I. Es ist bemerkenswert, daß im letzten Beweis nur die Tatsache genutzt wurde, daß die Funktion $f(t)$ für $t \geqq x$ wächst. Das Verhalten $f(t)$ für $t < x$ war dabei ganz belanglos. Es gilt somit der Satz

A'. *Es sei $f(x)$ für $x \leqq \beta$ (β ist endlich) nichtnegativ und für δ ($\delta < \beta$) wachsend; es sei $n \geqq 1$ und das Integral*

$$\int_{-\infty}^{\beta} f(x) x^{\nu} dx$$

$0 \leqq \nu \leqq 2n-1$ *endlich, für $\nu = 0$ positiv. Es sei ferner das Polynom en Grades $A_n(x)$ durch die Bedingungen definiert*

$$A_n(\beta) = 1, \quad \int_{-\infty}^{\beta} f(x) A_n(x) x^r dx = 0 \qquad (0 \leqq r < n);$$

n ist

$$\sqrt{\frac{f(x)}{f(\beta)}} |A_n(x)| \leqq 1 \qquad (\delta \leqq x \leqq \beta).$$

II. Es möge in der Ungleichung (8') für $x = \alpha$ ($\delta \leqq \alpha < \beta$) das chheitszeichen gelten. Dann muß zunächst nach § 3

$$\int_{\alpha}^{\beta} [E(t)]^2 df^*(t) = 0$$

. Daraus folgt[10]), daß die im Intervall (α, β) wachsende Funktion $f^*(t)$ lbst abteilungsweise konstant ist und an ihren Wachstumsstellen das vnom $E(t)$ verschwindet; nun ist $f(t)$ und so auch $f^*(t)$ im Intervall β) nicht überall gleich 0, so daß nur der Fall b) des § 2 zulässig ot. Ist also in (8') für $x = \alpha$ ($\delta \leqq \alpha < \beta$) das Gleichheitszeichen ig, so ist $f(t)$ im Intervall (α, β) abteilungsweise konstant und ihre hstumsstellen sind Wurzeln des Polynoms $A_n(x)$.

Andererseits muß

$$-2 \int_{-\infty}^{\alpha} f(t) A_n(t) A_n'(t) dt = 0$$

woraus

$$\int_{-\infty}^{\alpha} f(t) dt = 0$$

Zusammenfassend können wir also sagen, daß *in der Ungleichung* (8') *Gleichheitszeichen für eine feste $x = \alpha$ ($\delta \leqq \alpha < \beta$) nur dann ein-*

[10]) S. O. Perron, l. c. [5]) S. 368, Hilfssatz 2.

treten kann, wenn $f(t)$ im Intervall (α, β) abteilungsweise konstant ist, an ihren Wachstumsstellen[11]) *das Polynom $A_n(t)$ verschwindet und*

$$\int_{-\infty}^{\alpha} f(t)\,dt = 0$$

ist.

Der einfachste Fall, wo alle diese Bedingungen erfüllt sind, ist:

$$f(t) = 0 \quad \text{für} \quad t < \alpha,$$
$$f(t) = 1 \quad \text{für} \quad \alpha \leqq t \leqq \beta;$$

man hat dann

$$A_n(t) = P_n\left(2\,\frac{t-\alpha}{\beta-\alpha} - 1\right),$$

wo $P_n(x)$ das n-te Legendresche Polynom bezeichnet.

Das folgende einfache Beispiel will zeigen, daß der letztgenannte Fall nicht der einzige ist, für welchen in $(8')$ das Gleichheitszeichen gilt.

Es sei

$$f(t) = 0 \quad \text{für} \quad t < \alpha,$$
$$f(t) = h_1 \quad \text{für} \quad \alpha \leqq t < \gamma,$$
$$f(t) = h_2 \quad \text{für} \quad \gamma \leqq t \leqq \beta$$

und $n = 1$. Hier ist $0 < h_1 < h_2$ beliebig und

$$\gamma = \frac{\sqrt{h_1}\,\alpha + \sqrt{h_2}\,\beta}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}.$$

Dann ist $\alpha < \gamma < \beta$, ferner

$$A_1(t) = \frac{t - \dfrac{c_1}{c_0}}{\beta - \dfrac{c_1}{c_0}},$$

wo

$$c_0 = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = (\gamma - \alpha)h_1 + (\beta - \gamma)h_2,$$

$$c_1 = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,t\,dt = \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{2}\,h_1 + \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2}\,h_2$$

ist; es ist nämlich

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\left(t - \frac{c_1}{c_0}\right)dt = c_1 - \frac{c_1}{c_0}\,c_0 = 0.$$

Nun hat man aber, wie eine einfache Rechnung bestätigt,

$$\frac{c_1}{c_0} = \frac{1}{2}\,\frac{(\gamma^2 - \alpha^2)h_1 + (\beta^2 - \gamma^2)h_2}{(\gamma - \alpha)h_1 + (\beta - \gamma)h_2} = \gamma,$$

woraus die Behauptung folgt.

---

[11]) α und β zählen natürlich nicht dazu.

III. Ganz ähnlich, wie den Satz **A**′, beweist man den Satz

B. *Ist* $f(x)$ *für* $x \geqq \beta$ (β *ist endlich*) *nichtnegativ und für* $x \leqq \delta$ $(> \beta)$ *abnehmend*[12]). *ferner* $n \geqq 1$ *und das Integral*

$$\int_{\beta}^{\infty} f(x) x^{\nu} dx$$

$0 \leqq \nu \leqq 2n-1$ *endlich, für* $\nu = 0$ *positiv, ist endlich das Polynom en Grades* $A_n(x)$ *durch die Bedingungen definiert*

$$A_n(\beta) = 1, \quad \int_{\beta}^{\infty} f(x) A_n(x) x^r dx = 0 \qquad (0 \leqq r < n),$$

ist

$$\sqrt{\frac{f(x)}{f(\beta)}} |A_n(x)| \leqq 1 \qquad (\beta \leqq x \leqq \delta).$$

Ferner:

C. *Es sei* $f(x)$ *im endlichen Intervall* (α, β) *nichtnegativ und*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0;$$

existiere ferner eine innere Stelle δ *des Intervalls* (α, β) *von der Eigen- ft, daß* $f(x)$ *für* $\alpha \leqq x \leqq \delta$ *abnimmt und für* $\delta \leqq x \leqq \beta$ *wächst; es endlich* $A_n(x)$ *ein Polynom* n*-ten Grades* $(n \geqq 1)$, *definiert durch Bedingungen*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) A_n(x) x^r dx = 0 \qquad (0 \leqq r < n).$$

nn ist

$$\sqrt{f(x)} |A_n(x)| \leqq \sqrt{f(\alpha)} |A_n(\alpha)| \qquad (\alpha \leqq x \leqq \delta)$$

$$\sqrt{f(x)} |A_n(x)| \leqq \sqrt{f(\beta)} |A_n(\beta)| \qquad (\delta \leqq x \leqq \beta).$$

Ist $f(x)$ im endlichen Intervall (α, β) nichtnegativ, nicht identisch schwindend, beschränkt und von unten konvex, so sind die Bedingungen Satzes **C** immer erfüllt.

§ 5.

Anwendungen.

Aus den vorangehenden Untersuchungen folgen zunächst sämtliche ultate meiner früher zitierten Arbeit[13]), d. h. die Sätze (4) und (6). Ich setze nun im Satze **C**

$$\alpha = -1, \quad \beta = 1, \quad f(x) = |x|^{2k} \qquad (k \geqq 0).$$

[12]) D. h. $f(x_1) \geqq f(x_2)$ für $x_1 \leqq x_2$.

[13]) L. c. [1])

Dann ist $\delta = 0$ und $f(-1) = f(1) = 1$; ferner

$$A_n(-x) = (-1)^n A_n(x).$$

In der Tat

$$\int_{-1}^{1} |x|^{2k} A_n(-x) x^r dx = (-1)^r \int_{-1}^{1} |x|^{2k} A_n(x) x^r dx = 0 \qquad (0 \leqq r < n)$$

also

$$A_n(-x) = c A_n(x).$$

Die Vergleichung der Koeffizienten von x^n ergibt $c = (-1)^n$. Also

$$|x|^k |A_n(x)| \leqq 1 \qquad (|x| \leqq 1)$$

und das Gleichheitszeichen ist hier nach § 4, II nur für $x = \pm 1$ gültig.

Ich erhalte so den Satz:

Ist $k \geqq 0$ beliebig und $n \geqq 1$, ferner $A_n^{(k)}(x)$ das Polynom n-ten Grades, definiert durch die Bedingungen

$$A_n^{(k)}(1) = 1, \qquad \int_{-1}^{1} |x|^{2k} A_n^{(k)}(x) x^r dx = 0 \qquad (0 \leqq r < n),$$

so ist

$$|x|^k |A_n^{(k)}(x)| < 1 \qquad (|x| < 1) \tag{12}$$

Daraus ergibt sich der folgende, von Herrn I. Schur vermutete Satz[14]:

Es sei k nichtnegativ und ganz. Orthogonalisiert man das System

$$x^k, x^{k+1}, \ldots, x^n, \ldots$$

für $-1 \leqq x \leqq 1$, so erhält man eine Folge von Polynomen

$$P_k^{(k)}(x), \quad P_{k+1}^{(k)}(x), \quad \ldots, \quad P_n^{(k)}(x), \quad \ldots,$$

die den folgenden Bedingungen genügen:

a) *$P_n^{(k)}(x)$ ist ein Polynom n-ten Grades,*

b) $\int_{-1}^{1} P_m^{(k)}(x) P_n^{(k)}(x) dx = 0 \qquad (m \gtrless n;\ m, n \geqq k)$,

c) $P_n^{(k)}(1) = 1 \qquad (n \geqq k)$.

Dann ist

$$\left| P_n^{(k)}(x) \right| \leqq 1 \qquad (|x| \leqq 1;\ n \geqq k), \tag{12'}$$

Das Gleichheitszeichen ist hier nur für $x = \pm 1$, oder für $k = 0$, $n =$ gültig.

---

[14]) Diese Vermutung hat die Veranlassung zu dieser und meiner früheren Arbeit (l. c.[1])) gegeben.

In der Tat

$$P_n^{(k)}(x) = x^k A_{n-k}^{(k)}(x) \qquad (n \geqq k)$$

$k = 0$, so ist

$$P_n^{(0)}(x) = A_n^{(0)}(x) = P_n(x),$$

$P_n(x)$ das n-te Legendresche Polynom bezeichnet. Durch meinen
z A′ erhält also unter anderen auch der klassische Satz (2) einen
ien Beweis. Es ist vielleicht nicht ohne Interesse, daß dazu keine
deren Hilfsmittel bzw. Eigenschaften herangezogen wurden, als ausschließ-
h die Orthogonalitätseigenschaft (1).

§ 6.

Eine weitere Anwendung.

Herr I. Schur hat mir folgende Anwendung d... zuletzt ausgespro-
nen Satzes mitgeteilt (vgl. hierzu den § 4 meiner früher zitierten
beit):

*Es sei $Q_n(x)$ ein Polynom n-ten Grades ($n \geqq 1$), das nicht identisch
schwindet und für welches $x = 0$ eine k-fache Nullstelle ist. Dann ist*

$$[Q_n(x)]^2 \leqq \frac{(n+1)^2 - k^2}{2} \int_{-1}^{1} [Q_n(t)]^2 \, dt \qquad (|x| \leqq 1).^{15})$$

Das Gleichheitszeichen ist hier nur für

$$Q_n(x) = c[P_k^{(k)}(x) + P_{k+1}^{(k)}(x) + \ldots + P_n^{(k)}(x)]$$

d für $x = \pm 1$ gültig ($c \neq 0$).

Es sei

$$u_\nu^{(k)} = \int_{-1}^{1} [P_\nu^{(k)}(t)]^2 \, dt$$

d

$$\pi_\nu^{(k)}(t) = \frac{1}{\sqrt{u_\nu^{(k)}}} P_\nu^{(k)}(t).$$

setze

$$Q_n(x) = \alpha_k \pi_k^{(k)}(x) + \alpha_{k+1} \pi_{k+1}^{(k)}(x) + \ldots + \alpha_n \pi_n^{(k)}(x),$$

$\alpha_k, \ldots, \alpha_n$ beliebige reelle Konstanten bezeichnen. Nach der
hwarzschen Ungleichung

$$[Q_n(x)]^2 \leqq \sum_{\nu=k}^{n} \alpha_\nu^2 \sum_{\nu=k}^{n} [\pi_\nu^{(k)}(x)]^2.$$

---

15) $[Q_n(x)]^2$ kann man hier durch das allgemeinere Polynom $2n$-ten Grades
tzen, welches den folgenden Bedingungen genügt: a) es ist für jedes x nichtnegativ,
e jedoch identisch zu verschwinden; b) es verschwindet für $x = 0$ $2k$-fach.

Man hat aber

$$\sum_{\nu=k}^{n} \alpha_\nu^2 = \int_{-1}^{1} [Q_n(t)]^2 \, dt$$

und

$$[\pi_\nu^{(k)}(x)]^2 \leqq \frac{1}{u_\nu^{(k)}} \qquad (|x| \leqq 1),$$

also

$$[Q_n(x)]^2 \leqq \sum_{\nu=k}^{n} \frac{1}{u_\nu^{(k)}} \int_{-1}^{1} [Q_n(t)]^2 \, dt \qquad (|x| \leqq 1).$$

Das Gleichheitszeichen ist hier nur für $\alpha_k = \alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_n$ und für $x = \pm 1$ gültig.

Es handelt sich nunmehr allein um die Berechnung der Summe

$$\sum_{\nu=k}^{n} [\pi_\nu^{(k)}(1)]^2 = \sum_{\nu=k}^{n} \frac{1}{u_\nu^{(k)}}.$$

Ich verzichte hier darauf[16]) und teile nur das Resultat mit. Es ist

$$u_\nu^{(k)} = \frac{2}{2\nu+1},$$

woraus in der Tat

$$\sum_{\nu=k}^{n} \frac{1}{u_\nu^{(k)}} = \frac{(n+1)^2 - k^2}{2}$$

folgt.

Ich stelle jetzt folgende allgemeine Frage:

Es sei $n \geqq 1$ und für $f(x)$ die Bedingungen des Satzes A′ *erfüllt. Es sei $Q_n(x)$ ein Polynom n-ten Grades, für welches*

$$\int_{-\infty}^{\beta} f(t)[Q_n(t)]^2 \, dt = 1 \tag{13}$$

ist. Was ist die obere Grenze des Maximums von

$$f(x)[Q_n(x)]^2$$

im Intervall $\delta \leqq x \leqq \beta$, für alle $Q_n(x)$?

Es sei $A_n(x)$ wie im Satze A′ definiert und

$$\int_{-\infty}^{\beta} f(x)[A_n(x)]^2 \, dx = u_n \qquad (n \geqq 1).$$

Ich setze

$$\int_{-\infty}^{\beta} f(x) \, dx = u_0$$

---

[16]) Zu diesem Zwecke ist es vielleicht am besten, die Formel (11) meiner Arbeit (l. c.[1])) zu benutzen.

$$a_n(x) = \frac{1}{\sqrt{u_n}} A_n(x) \qquad (A_0(x) = 1;\ n \geqq 0).$$

setze ferner

$$Q_n(x) = \alpha_0 a_0(x) + \alpha_1 a_1(x) + \ldots + \alpha_n a_n(x),$$

$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ beliebige reelle Konstanten bezeichnen. Die Bedingung (13) dann vollständig gleichbedeutend damit, daß

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 1$$

Also

$$f(x)[Q_n(x)]^2 \leqq f(x) \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu^2 \sum_{\nu=0}^{n} [a_\nu(x)]^2 =$$

$$= f(x) \sum_{\nu=0}^{n} [a_\nu(x)]^2 \leqq f(\beta) \sum_{\nu=0}^{n} [a_\nu(\beta)]^2 \qquad (\delta \leqq x \leqq \beta),$$

durch die gesuchte obere Grenze geliefert wird.

Wien, im Oktober 1918.

(Eingegangen am 21. Oktober 1918.)

Zur Theorie der Heckeschen Zetafunktionen, welche komplexen Charakteren entsprechen.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Herr Gronwall[1]) hat für die Dirichletschen Reihen

$$L(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s},$$

welche einem komplexen Charakter[2]) mod k entsprechen, die bekannte Tatsache des Nichtverschwindens im Punkte 1, über die hinaus ich schon vordem

$$\frac{1}{|L(1)|} < c_1 \log^5 k$$

(wo c_1 und c_2 nachher eine absolute, positive Konstante ist) bewiesen hatte, zu

$$\frac{1}{|L(1)|} < c_2 \log k (\log\log k)^{\frac{3}{4}}$$

verschärft. Sein Beweis ist allerdings verschiedener Vereinfachungen fähig, durch die er kürzer und durchsichtiger wird. Eine derselben habe ich schon auf S. 286 meiner Arbeit *Über die Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlkörper*[3]) angegeben; des weiteren erwähne ich hier:

1. Bei der Behandlung der uneigentlichen Charaktere ist es nicht nötig, wie Herr Gronwall es auf S. 146—149 tut, den Faktor

---

[1]) Sur les séries de Dirichlet correspondant à des caractères complexes, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXXV (1913), S. 145—159.

[2]) Vgl. § 101 meines *Handbuchs der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Leipzig und Berlin 1909.

[3]) Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1918, S. 285—295.

$(1 - \varepsilon_\nu p_\nu^{-s})$ nebst seiner Weierstraßschen Produktzerlegung und den

aus resultierenden Gliedern durch die Rechnung mitzuschleppen.

2. Auf S. 152 setzt er $t = \gamma$ zur Untersuchung der Lage einer bemmten Wurzel in seine Ungleichung (23) ein, einem älteren Paradigma s) in der Nähe der Geraden $\sigma = 1$) zufolge, von dem sich hier die Abchung empfiehlt, $t = 0$ zu setzen; dadurch können sich die Entwickgen der vorangehenden Seiten auf die reelle Achse beschränken.

Ohne Kenntnis der Gronwallschen Arbeit vorauszusetzen, will ich folgenden mit der modifizierten Gronwallschen Methode einen allheineren, auf beliebige algebraische Zahlkörper $\varkappa$ vom Grade $n \geqq 1$ belichen Satz beweisen.

Es werde in den Bezeichnungen meiner Arbeit *Über Ideale und mideale in Idealklassen*[4]), auf die ich im übrigen verweise,

$$|\Delta| N\mathfrak{f} = k$$

etzt. Bekanntlich[5]) ist $k \geqq 3$, also $\log\log k > 0$.

Der Hauptsatz lautet nun: *Es sei χ ein beliebiger komplexer*[6]) *rakter* mod $\mathfrak{f}$ *und $\zeta(s, \chi)$ die zugehörige Heckesche Zetafunktion im ne der Definition* XVII. *Dann ist*

$$\frac{1}{|\zeta(1, \chi)|} < \lambda_1 \log^n k \, (\log\log k)^{\frac{3n}{8}},$$

$\lambda_1 = \lambda_1(n)$ (desgl. $\lambda_2, \lambda_3, \ldots$ nachher) *eine positive, nur von n* (nicht n Körper, $\mathfrak{f}$ und χ, also gewiß nicht von k) *abhängige Konstante ist.*

Dieser Satz enthält offenbar den Gronwallschen als speziellen Fall = 1 ($\varkappa$ Körper der rationalen Zahlen). Eine wesentliche Schwierigkeit der Ausdehnung seiner Beweismethode auf beliebige algebraische Zahlper werden nur die Hilfsformeln (28) und (40) seines § 2 machen, da kein Analogon zu der von ihm benutzten trivialen Abschätzung

$$\left|\sum_{m \leqq x} \chi(m)\right| < k$$

handen ist.

[4]) Mathematische Zeitschrift, Bd. II (1918), S. 52—154.

[5]) Nach Minkowski (vgl. z. B. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, Bd. II, 2. Aufl. unschweig 1899, S. 691) ist nämlich

$$|\Delta| \geqq \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \left(\frac{n^n}{n!}\right)^2,$$

aus für $n \geqq 2$, wie man sich leicht überzeugt $|\Delta| \geqq 3$, also $k \geqq 3$ folgt; für $n = 1$ zwar $|\Delta| = 1$, aber bei jedem Nicht-Hauptcharakter $N\mathfrak{f} \geqq 3$.

[6]) D. h. der Charakter $\bar{\chi}$ des Satzes XXXVI sei von χ verschieden.

$\zeta_\varkappa(s)$ bedeute in der Folge die Dedekindsche Zetafunktion, die als Spezialfall $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$, χ Hauptcharakter in $\zeta(s, \chi)$ enthalten ist; $\zeta(s)$ die Riemannsche Zetafunktion, also den Spezialfall von $\zeta_\varkappa(s)$ für den Körper der rationalen Zahlen.

Satz 1: *Es sei* $d_0 = 1$, *wenn* $\mathfrak{f} = \mathfrak{o}$ *und zugleich* χ *der Hauptcharakter ist; für jeden anderen eigentlichen Charakter sei* $d_0 = 0$. *Dann ist für jeden eigentlichen* (reellen oder komplexen) *Charakter und* $1 < s < 2$, *wenn* $\varrho = \beta + \gamma i$ *die Wurzeln von* $\zeta(s, \chi)$ *im Streifen* $0 < \sigma < 1$ *durchläuft,*

$$(1) \qquad -\frac{\zeta'}{\zeta}(s, \chi) - \frac{\zeta'}{\zeta}(s, \bar{\chi}) < \lambda_2 \log k + \frac{2 d_0}{s-1} - 2 \sum_\varrho \frac{s-\beta}{|s-\varrho|^2},$$

also für $\zeta(s, \chi) = \zeta_\varkappa(s)$ *a fortiori*

$$(2) \qquad -\frac{\zeta_\varkappa'}{\zeta_\varkappa}(s) < \lambda_3 \log k + \frac{1}{s-1},$$

für jedes andere $\zeta(s, \chi)$ *mit eigentlichem* χ

$$(3) \qquad -\frac{\zeta'}{\zeta}(s, \chi) - \frac{\zeta'}{\zeta}(s, \bar{\chi}) < \lambda_2 \log k - 2 \sum_\varrho \frac{s-\beta}{|s-\varrho|^2}.$$

Beweis: Die durch (52), d. h. die Gleichung

$$(A(\mathfrak{f}))^s \left(\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\right)^q \left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{r_1-q} (\Gamma(s))^{r_2} \zeta(s, \chi) = \Phi(s, \chi)$$

definierte Funktion $\Phi(s, \chi)$ genügt einerseits der Funktionalgleichung (53), die ich hier nur in der Konsequenz

$$(4) \qquad \frac{\Phi'}{\Phi}(s, \chi) + \frac{\Phi'}{\Phi}(1-s, \bar{\chi}) = 0$$

brauche. Andererseits ist nach Satz LXXII die über alle im Streifen $0 < \sigma < 1$ gelegenen Wurzeln von $\Phi(s, \chi)$, d. h. $\zeta(s, \chi)$, erstreckte Summe

$$\sum_\varrho \frac{1}{|\varrho|^2}$$

konvergent und nach Satz LXXIV

$$s^{d_0}(s-1)^{d_0} \Phi(s, \chi) = a e^{cs} \prod_\varrho \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right) e^{\frac{s}{\varrho}}.$$

Daraus folgt

$$(5) \qquad \frac{d_0}{s} + \frac{d_0}{s-1} + \frac{\Phi'}{\Phi}(s, \chi) = c + \sum_\varrho \left(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{\varrho}\right);$$

ebenso ist (wenn ϱ immer noch die Wurzeln von $\zeta(s, \chi)$ im Streifen $0 < \sigma < 1$ durchläuft)

$$(6) \qquad \frac{d_0}{s} + \frac{d_0}{s-1} + \frac{\Phi'}{\Phi}(s, \bar{\chi}) = \bar{c} + \sum_\varrho \left(\frac{1}{s-\bar{\varrho}} + \frac{1}{\bar{\varrho}}\right),$$

$\bar{z}$ die zu z konjugiert komplexe Zahl ist. Nach (4) ist daher

$$0 = c + \bar{c} + \sum_{\varrho} \left(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{1-s-\bar{\varrho}} + \frac{1}{\bar{\varrho}} \right),$$

aus sich, wenn $s = 1$ eingesetzt wird,

$$0 = c + \bar{c} + \sum_{\varrho} \left(\frac{1}{1-\varrho} + \frac{1}{\varrho} \right)$$

bt; demnach ist

$$0 = c + \bar{c} + \sum_{\varrho} \left(\frac{1}{\bar{\varrho}} + \frac{1}{\varrho} \right),$$

die Menge der nach absolut wachsenden Ordinaten geordneten $\bar{\varrho}$ mit ebenso geordneten Menge der $1 - \varrho$ identisch ist.

Also folgt aus (5) und (6)

$$2\frac{d_0}{s} + 2\frac{d_0}{s-1} + \frac{\Phi'}{\Phi}(s,\chi) + \frac{\Phi'}{\Phi}(s,\bar{\chi}) = \sum_{\varrho} \left(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{s-\bar{\varrho}} \right).$$

Andererseits ist

$$\mathfrak{f}))^{2s} \left(\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \right)^{2q} \left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right)^{2(r_1-q)} (\Gamma(s))^{2r_2} \zeta(s,\chi)\zeta(s,\bar{\chi}) = \Phi(s,\chi)\Phi(s,\bar{\chi}),$$

hin

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi) - \frac{\zeta'}{\zeta}(s,\bar{\chi}) = 2\log A(\mathfrak{f}) + q\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+1}{2}\right) + (r_1 - q)\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}\right)$$
$$+ 2r_2\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) - \frac{\Phi'}{\Phi}(s,\chi) - \frac{\Phi'}{\Phi}(s,\bar{\chi}).$$

aus folgt wegen

$$A(\mathfrak{f}) = 2^{-r_2}\pi^{-\frac{n}{2}}\sqrt{|\Delta|\,N\mathfrak{f}} = 2^{-r_2}\pi^{-\frac{n}{2}}\sqrt{k}$$

$1 < s < 2$ nach (7)

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi) - \frac{\zeta'}{\zeta}(s,\bar{\chi}) < \log k + \lambda_3 + \frac{2d_0}{s-1} - 2\sum_{\varrho}\frac{s-\beta}{|s-\varrho|^2}$$
$$< \lambda_2 \log k + \frac{2d_0}{s-1} - 2\sum_{\varrho}\frac{s-\beta}{|s-\varrho|^2},$$

it (1) bewiesen ist.

Satz 2: *Für jeden Nicht-Hauptcharakter und* $1 < s < 2$ *ist*

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi) - \frac{\zeta'}{\zeta}(s,\bar{\chi}) < \lambda_4 \log k.$$

Beweis: 1. Für eigentliche Charaktere folgt die Behauptung unelbar aus (3).

2. Für einen uneigentlichen Charakter, der nicht der Hauptcharakter ergibt sie sich hieraus auf folgende Weise. Nach Satz LXII ist, wenn

χ der zugehörige eigentliche Charakter mod $\mathfrak{f}_0$ und $\zeta_0(s,\chi)$ die ihm entsprechende Zetafunktion ist,

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi)=-\sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}}\frac{\chi(\mathfrak{p})\log N(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s-\chi(\mathfrak{p})}-\frac{\zeta_0'}{\zeta_0}(s,\chi);$$

und hierin ist für $1<s<2$

$$\left|\sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}}\frac{\chi(\mathfrak{p})\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s-\chi(\mathfrak{p})}\right|<\sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}}\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}-1}\leqq\sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}}\log N\mathfrak{p}=\log\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}}N\mathfrak{p}$$
$$=\log N\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}}\mathfrak{p}\leqq\log N\mathfrak{f}\leqq\log k,$$

woraus die Behauptung nach 1. wegen $N\mathfrak{f}_0<N\mathfrak{f}$, $k_0=|\Delta|N\mathfrak{f}_0<k$ unmittelbar folgt.

Satz 3: *Es sei χ ein komplexer Charakter. Ich behaupte die Existenz eines $\lambda_5<1$, so daß im Kreise $|s-1|\leqq\frac{\lambda_5}{\log k}$*

$$\zeta(s,\chi)\neq 0$$

ist.

Beweis: 1. Es sei χ ein eigentlicher komplexer Charakter. Für jede reelle φ ist

$$6+8\cos\varphi+2\cos 2\varphi=4(1+\cos\varphi)^2\geqq 0.$$

Für $(\mathfrak{p},\mathfrak{f})=\mathfrak{o}$ setze ich $\chi(\mathfrak{p})=e^{\omega(\mathfrak{p})i}$, $0\leqq\omega(\mathfrak{p})<2\pi$; dann hat für $(\mathfrak{p},\mathfrak{f})=\mathfrak{o}$ der Charakter $\chi^2(\mathfrak{p})$ die Gestalt $\chi^2(\mathfrak{p})=e^{2\omega(\mathfrak{p})i}$. Daraus folgt für $1<s<2$, wenn χ_0 der Hauptcharakter ist,

$$-6\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi_0)-8\,\Re\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi)-2\,\Re\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi^2)$$
$$=\sum_{\mathfrak{p},m}{}'\frac{\log N\mathfrak{p}\,(6+8\cos m\omega(\mathfrak{p})+2\cos 2m\omega(\mathfrak{p}))}{N\mathfrak{p}^{ms}}\geqq 0,$$

wobei $\sum'$ bedeutet, daß $(\mathfrak{p},\mathfrak{f})=\mathfrak{o}$ ist. Also ist für $1<s<2$

$$(9)\quad -6\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi_0)-4\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi)+\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\overline{\chi})\right)-\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi^2)+\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\overline{\chi}^2)\right)\geqq$$

Hierin ist

$$(10)\qquad -\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi_0)=\sum_{\mathfrak{p},m}{}'\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{ms}}\leqq\sum_{\mathfrak{p},m}\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{ms}}=-\frac{\zeta_\varkappa'}{\zeta_\varkappa}(s).$$

Aus (2), (3), (8) (letztere Relation auf χ^2 angewendet), (9) und (10) folgt für $1<s<2$ und jede im Streifen $0<\sigma<1$ gelegene Wurzel ϱ von $\zeta(s,\chi)$

$$2\frac{s-1}{|s-\varrho|^2}<2\frac{s-\beta}{|s-\varrho|^2}<\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi)+\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\overline{\chi})+\lambda_2\log k$$
$$<\tfrac{3}{2}\lambda_2\log k+\tfrac{3}{2}\frac{1}{s-1}+\tfrac{1}{4}\lambda_4\log k+\lambda_2\log k<\tfrac{3}{2}\frac{1}{s-1}+\lambda_6\log k,$$

rin $\lambda_6 > 1$ gewählt werden kann. Setze ich hierin

$$s = 1 + \frac{1}{4\lambda_6 \log k} = s_0$$

(wobei $1 < s_0 < 2$ ist), so erhalte ich

$$2\frac{s_0 - 1}{|s_0 - \varrho|^2} < \frac{7}{4}\frac{1}{s_0 - 1},$$

$$|s_0 - \varrho| > \sqrt{\tfrac{8}{7}}(s_0 - 1),$$

$$\varrho| = |(s_0 - \varrho) - (s_0 - 1)| > (\sqrt{\tfrac{8}{7}} - 1)(s_0 - 1) = (\sqrt{\tfrac{8}{7}} - 1)\frac{1}{4\lambda_6 \log k} = \frac{\lambda_5}{\log k},$$

$\lambda_5 < 1$ ist.

2. χ sei ein uneigentlicher komplexer Charakter. Ist X der zu χ hörende eigentliche Charakter mod $\mathfrak{f}_0$, so ist für $|s-1| \leqq \frac{\lambda_5}{\log k_0}$ nach 1.

$$\zeta_{\mathfrak{c}}(s, \mathsf{X}) \neq 0,$$

o nach Satz LXII

$$\zeta(s, \chi) \neq 0.$$

tzteres gilt also a fortiori in dem kleineren Kreise $|s-1| \leqq \frac{\lambda_5}{\log k}$.

Satz 4: *Für jeden Nicht-Hauptcharakter gilt im Rechteck* $1 \leqq \sigma \leqq 9$, $|t| \leqq 4$

$$|\zeta(s, \chi)| < k^{\lambda_7}.$$

Beweis: 1. χ sei eigentlich. Denken wir uns (41) bei irgendeiner stimmten Wahl des Repräsentanten $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{R}^{-1}$ über alle Klassen $\mathfrak{R}$ mmiert, so entsteht

1) $$\Phi(s, \chi) = \Psi_1(s, \chi) + \Psi_2(1 - s, \chi),$$

o $\Psi_1(s, \chi)$ bzw. $\Psi_2(1-s, \chi)$ die über alle $\mathfrak{R}$ summierte zweite und itte, bzw. vierte und fünfte Zeile von (41) bezeichnet. Ein Blick auf n Beweis des Satzes LVII lehrt, daß für $\sigma \leqq 9$ die Abschätzungen

$$|\Psi_1(s, \chi)| \leqq (A(\mathfrak{f}))^9 \left(\Gamma\left(\frac{9+1}{2}\right)\right)^q (\Gamma(\tfrac{9}{2}))^{r_1 - q} (\Gamma(9))^{r_2} \zeta_\varkappa(9),$$

$$|\Psi_2(s, \chi)| \leqq (A(\mathfrak{f}))^9 \left(\Gamma\left(\frac{9+1}{2}\right)\right)^q (\Gamma(\tfrac{9}{2}))^{r_1 - q} (\Gamma(9))^{r_2} \zeta_\varkappa(9)$$

lten.

Für $s > 1$ ist[7])

2) $$\zeta_\varkappa(s) \leqq (\zeta(s))^n < \left(1 + \frac{1}{s-1}\right)^n.$$

[7]) Vgl. meine Arbeit: Abschätzungen von Charaktersummen, Einheiten und lassenzahlen, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu öttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1918, S. 79—97 [S. 90].

Für $\sigma \leqq 9$ ist also

$$|\Psi_1(s, \chi)| < \lambda_8 k^{\frac{9}{2}},$$

für $\sigma \geqq -8$

$$|\Psi_2(1-s, \chi)| < \lambda_8 k^{\frac{9}{2}}.$$

Für $-1 \leqq \sigma \leqq 9$ ist daher wegen (11)

$$|\Phi(s, \chi)| < 2\lambda_8 k^{\frac{9}{2}}.$$

Aus (52) folgt demnach für $-1 \leqq \sigma \leqq 9$, $|t| \leqq 4$

$$|\zeta(s, \chi)| \leqq \lambda_9 k^{\frac{1}{2}} |\Phi(s, \chi)| < \lambda_{10} k^5 < k^{\lambda_{11}}.$$

2. χ sei uneigentlich. Aus Satz LXII folgt (vgl. Definition XVIII) in der ganzen Ebene

$$|\zeta(s, \chi)| = |\zeta_0(s, \mathsf{X})| \left| \sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{f}} \frac{\mu(\mathfrak{b})\mathsf{X}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^s} \right|. \tag{13}$$

Nun ist im Rechteck $-1 \leqq \sigma \leqq 9$, $|t| \leqq 4$ einerseits nach 1.

$$|\zeta_0(s, \mathsf{X})| < k_0^{\lambda_{11}} < k^{\lambda_{11}},$$

andererseits

$$\left| \sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{f}} \frac{\mu(\mathfrak{b})\mathsf{X}(\mathfrak{b})}{N\mathfrak{b}^s} \right| \leqq \sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{f}} N\mathfrak{b} \leqq k \sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{f}} 1 \leqq k \sum_{N\mathfrak{b} \leqq k} 1,$$

also[8]) höchstens gleich der k-fachen Lösungszahl von $u_1 u_2 \dots u_n \leqq k$ in positiven ganzen rationalen Zahlen, also a fortiori $\leqq k^{n+1}$. Demnach ergibt sich aus (13)

$$|\zeta(s, \chi)| < k^{\lambda_{11}+n+1} = k^{\lambda_{12}}.$$

Satz 5: *Für jeden Nicht-Hauptcharakter gilt im Rechteck* $1 - \frac{1}{\log k} \leqq \sigma \leqq 3$, $|t| \leqq 1$ *die Ungleichung*

$$|\zeta(s, \chi)| < \lambda_{13} \log^n k.^9)$$

Beweis: Nach dem Hadamardschen Dreikreisesatz[10]) gilt für $0 < r_1 < r_2 < r_3$, wenn $F(z)$ für $|z - z_0| \leqq r_3$ regulär ist und $\operatorname{Max}_{|z-z_0| \leqq r} |F(z)| = M_r$ $(\nu = 1, 2, 3)$ gesetzt wird, die Ungleichung

$$M_2 \leqq M_3^{\log \frac{r_2}{r_1} : \log \frac{r_3}{r_1}} M_1^{\log \frac{r_3}{r_2} : \log \frac{r_3}{r_1}}. \tag{14}$$

---

[8]) Vgl. Hilfssatz 1 meiner in Anm. [7]) genannten Abhandlung.

[9]) Übrigens wird diese Ungleichung in voller Schärfe nur ganz am Ende der Abhandlung auf der Strecke $1 < s < 2$ gebraucht; im Gesamtrechteck kommt nachher nur die Abschätzung $\log^{\lambda_{14}} k$ zur Anwendung.

[10]) Vgl. § 21 meiner *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*, Berlin 1916.

Dies wende ich, wenn s irgendein Punkt im Rechteck der Behauptung
, auf $F(z) = \zeta(z, \chi)$, $z_0 = s + 1 + \frac{2}{\log k}$, $r_1 = 1$, $r_2 = 1 + \frac{2}{\log k}$,
$= 3$ an. Da der Kreis $|z - z_0| \leqq r_3$ dem Rechteck $-1 \leqq \Re z \leqq 9$,
$|z| \leqq 4$ angehört, ist nach Satz 4

$$M_3 < k^{\lambda_7};$$

dererseits ist

$$\log \frac{r_2}{r_1} : \log \frac{r_3}{r_1} = \log\left(1 + \frac{2}{\log k}\right) : \log 3 < \log\left(1 + \frac{2}{\log k}\right) < \frac{2}{\log k};$$

her ergibt sich

5) $$M_3^{\log \frac{r_2}{r_1} : \log \frac{r_3}{r_1}} < k^{\lambda_7 \frac{2}{\log k}} = e^{2\lambda_7}.$$

r M_1 ergibt sich, weil der Kreis $|z - z_0| \leqq r_1$ der Halbebene
$z \geqq 1 + \frac{1}{\log k}$ angehört, nach (12)

6) $$M_1 \leqq \zeta_\varkappa\left(1 + \frac{1}{\log k}\right) < (1 + \log k)^n < 2^n \log^n k.$$

s (14), (15) und (16) folgt also, weil der Exponent von M_1 in (14)
einer als 1 und die rechte Seite von (16) größer als 1 ist,

$$M_2 < e^{2\lambda_7}\, 2^n \log^n k = \lambda_{13} \log^n k.$$

nun der Punkt $z = s$ auf dem Rande des Kreises $|z - z_0| \leqq r_2$ liegt,
Satz 5 bewiesen.

Satz 6: *Es sei χ ein komplexer Charakter. Ich setze $s_1 = 1 + \frac{\lambda_5}{4 \log k}$.*
nn gilt im Kreise $|s - s_1| \leqq \frac{\lambda_5}{2 \log k}$, in dem $\zeta(s, \chi)$ nach Satz 3 nicht
rschwindet, also die für $\sigma > 1$ durch

$$\sum_{\mathfrak{p}, m} \frac{\chi(\mathfrak{p}^m)}{m N \mathfrak{p}^{ms}}$$

finierte Funktion $G(s) = \log \zeta(s, \chi)$ regulär ist,

$$|G(s)| < \lambda_{15} \log \log k.$$

Beweis: Ich wende die Carathéodorysche Ungleichung[11])

7) $$|G(s)| \leqq |\Im G(s_1)| + |\Re G(s_1)| \frac{r + \varrho}{r - \varrho} + 2 \operatorname*{Max}_{|s - s_1| \leqq r} \Re G(s) \cdot \frac{\varrho}{r - \varrho}$$
$$(0 < \varrho < r)$$

[11]) Vgl. z. B. § 73 meines *Handbuchs*.

auf unser $G(s)$, mit $r = \frac{\lambda_5}{\log k}$, $\varrho = \frac{\lambda_5}{2 \log k}$ an. Da $G(s)$ nach Satz 3 für $|s - s_1| \leqq r$ regulär und $\lambda_5 < 1$ ist, ist nach Satz 5

$$\underset{|s-s_1| \leqq r}{\text{Max.}} \Re G(s) = \log \underset{|s-s_1| \leqq r}{\text{Max.}} |\zeta(s, \chi)| < \log \lambda_{13} + n \log \log k < \lambda_{16} \log \log k.$$

Nach (12) ist

$$|G(s_1)| \leqq \log \zeta_\varkappa(s_1) < n \log \frac{2}{s_1 - 1} < \lambda_{17} \log \log k.$$

(17) ergibt also im Kreise $|s - s_1| \leqq \frac{\lambda_5}{2 \log k}$

$$|G(s)| < \lambda_{17} \log \log k + \lambda_{17} \log \log k \cdot 3 + 2 \lambda_{16} \log \log k = \lambda_{15} \log \log k.$$

Satz 7: *Es sei χ ein komplexer Charakter. Für $|s - s_1| \leqq \frac{3}{8} \frac{\lambda_5}{\log k}$ ist*

$$|G'(s)| = \left| \frac{\zeta'}{\zeta}(s, \chi) \right| < \lambda_{18} \log k \log \log k.$$

Beweis: Für $|s - s_1| \leqq \frac{3}{8} \frac{\lambda_5}{\log k}$ ist im Kreise $|z - s| \leqq \frac{1}{8} \frac{\lambda_5}{\log k}$ nach Satz 6

$$|G(z)| < \lambda_{15} \log \log k,$$

also

$$|G'(s)| < \frac{\lambda_{15} \log \log k}{\frac{1}{8} \frac{\lambda_5}{\log k}} = \lambda_{18} \log k \log \log k.$$

Satz 8: *Es sei χ ein komplexer Charakter. Es werde von jetzt an*

$$s_2 = 1 + \frac{\lambda_5 \sqrt{\log \log 3}}{4 \log k \sqrt{\log \log k}} \text{ gesetzt. Für } 1 \leqq s \leqq s_2 \text{ ist}$$

$$|G'(s)| < \lambda_{19} \log k \sqrt{\log \log k}.$$

Beweis: Ich wende die Carathéodorysche Ungleichung auf $G'(s)$ und die Kreise mit dem Mittelpunkt s_2 und den Radien $r = \frac{\lambda_5 \sqrt{\log \log 3}}{4 \log k \sqrt{\log \log k}} + \frac{1}{8} \frac{\lambda_5}{\log k}$, $\varrho = \frac{\lambda_5 \sqrt{\log \log 3}}{4 \log k \sqrt{\log \log k}}$ an. Der Kreis $|s - s_2| \leqq r$ gehört dem Kreis $|s - s_1| \leqq \frac{3}{8} \frac{\lambda_5}{\log k}$ des Satzes 7 an, da $1 < s_2 \leqq s_1$ ist und der erstere Kreis durch $s = 1 - \frac{1}{8} \frac{\lambda_5}{\log k}$ geht. Es ist nach (2)

$$|G'(s_2)| = \left| \sum_{\mathfrak{p}, m} \frac{\chi(\mathfrak{p}^m) \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{m s_2}} \right| \leqq -\frac{\zeta_\varkappa'}{\zeta_\varkappa}(s_2)$$

$$< \lambda_2 \log k + \frac{1}{s_2 - 1} < \lambda_{20} \log k \sqrt{\log \log k},$$

also für $|s - s_2| \leqq \varrho$ (d. h. speziell für $1 \leqq s \leqq s_2$) nach Satz 7 und der Carathéodoryschen Ungleichung

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right| < \lambda_{20}\log k\sqrt{\log\log k} + \lambda_{20}\log k\sqrt{\log\log k}\cdot\frac{\frac{\lambda_5\sqrt{\log\log 3}}{2\log k\sqrt{\log\log k}} + \frac{1}{8}\frac{\lambda_5}{\log k}}{\frac{1}{8}\frac{\lambda_5}{\log k}}$$

$$+ 2\lambda_{18}\log k\log\log k\cdot\frac{\frac{\lambda_5\sqrt{\log\log 3}}{4\log k\sqrt{\log\log k}}}{\frac{1}{8}\frac{\lambda_5}{\log k}} < \lambda_{19}\log k\sqrt{\log\log k}.$$

Beweis des Hauptsatzes: Es sei χ ein komplexer Charakter. habe die gleiche Bedeutung wie in Satz 8. Dann ist

$$-\log\zeta(1,\chi) = -\log\zeta(s_2,\chi) + \int_1^{s_2}\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi)\,ds,$$

$$-\log|\zeta(1,\chi)| = -\Re\log\zeta(s_2,\chi) + \Re\int_1^{s_2}\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi)\,ds.$$

ach Satz 8 ist

$$\left|\int_1^{s_2}\frac{\zeta'}{\zeta}(s,\chi)\,ds\right| < \frac{\lambda_5\sqrt{\log\log 3}}{4\log k\sqrt{\log\log k}}\lambda_{19}\log k\sqrt{\log\log k} = \lambda_{21},$$

8) $$-\log|\zeta(1,\chi)| < -\Re\log\zeta(s_2,\chi) + \lambda_{21}.$$

us

$$3\log\zeta(s_2,\chi_0) + 4\,\Re\log\zeta(s_2,\chi) + \Re\log\zeta(s_2,\chi^2)$$

$$= 3\sum_{\mathfrak{p},m}{}' \frac{1}{mN\mathfrak{p}^{ms_2}} + 4\,\Re\sum_{\mathfrak{p},m}\frac{\chi(\mathfrak{p}^m)}{mN\mathfrak{p}^{ms_2}} + \Re\sum_{\mathfrak{p},m}\frac{\chi^2(\mathfrak{p}^m)}{mN\mathfrak{p}^{ms_2}}$$

$$= \sum_{\mathfrak{p},m}{}' \frac{3+4\cos m\,\omega(\mathfrak{p})+\cos 2m\,\omega(\mathfrak{p})}{mN\mathfrak{p}^{ms_2}} \geqq 0$$

lgt

9) $$-\Re\log\zeta(s_2,\chi) \leqq \tfrac{3}{4}\log\zeta(s_2,\chi_0) + \tfrac{1}{4}\log|\zeta(s_2,\chi^2)|.$$

Hierin ist nach (12)

$$\log\zeta(s_2,\chi_0) \leqq \log\zeta_\varkappa(s_2) < n\log\frac{2}{s_2-1}$$

0) $$< n\log\log k + \frac{n}{2}\log\log\log k + \lambda_{22};$$

rner, da χ^2 nicht Hauptcharakter ist, nach Satz 5

1) $$\log|\zeta(s_2,\chi^2)| < n\log\log k + \lambda_{23}.$$

Aus (18), (19), (20) und (21) folgt

$$
\begin{aligned}
&-\log|\zeta(1,\chi)| \\
&< \tfrac{3}{4} n \log\log k + \tfrac{3}{8} n \log\log\log k + \tfrac{3}{4}\lambda_{22} + \tfrac{1}{4} n \log\log k + \tfrac{1}{4}\lambda_{23} + \lambda_{21} \\
&= n \log\log k + \tfrac{3}{8} n \log\log\log k + \lambda_{24},
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{|\zeta(1,\chi)|} < \lambda_1 \log^n k \,(\log\log k)^{\frac{3n}{8}},
$$

q. e. d.

Göttingen, den 1. Februar 1919.

(Eingegangen am 3. Februar 1919.)

Über Potenzreihen und Bilinearformen.

Von

Otto Szász in Frankfurt a. M.

Die Potenzreihe

$$\tfrac{1}{2}c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots = \tfrac{1}{2}c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu z^\nu \qquad (c_\nu = a_\nu - b_\nu i),\ c_0 = a_0 \text{ reell},$$

für $|z| < 1$ konvergent. Bekanntlich[1]) gilt der

Satz A. Der Wertevorrat der harmonischen Funktion

$$2\Re\left[\frac{c_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varrho^\nu e^{\nu\varphi i}\right] = a_0 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \cos\nu\varphi + b_\nu \sin\nu\varphi)\varrho^\nu$$

$$0 \leqq \varphi < 2\pi, \qquad 0 \leqq \varrho < 1$$

mmt mit dem Wertevorrat der unendlichvielen Hermiteschen Formen

$$\sum_{\nu,\mu=0}^{n} c_{\mu-\nu} x_\nu \bar{x}_\mu \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad \text{für} \quad \sum_{\nu=0}^{n} |x_\nu|^2 = 1$$

erein, bei event. Ausschluß der Grenzen[2]). Hier ist $c_{-\nu} = \bar{c}_\nu$.

Hieraus folgt sofort, daß die Reihe (1) dann und nur dann für $\leqq \varrho < 1$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$ konvergent ist und eine beschränkte harmo-che Funktion darstellt, wenn die unendliche Hermitesche Form $\sum_{=0}^{\infty} c_{\mu-\nu} x_\nu \bar{x}_\mu$ beschränkt ist, (für $\sum |x_\nu|^2 = 1$), und die Grenzen beider mmen dann überein.

---

[1]) Man vgl. z. B. O. Szász, Über harmonische Funktionen und L-Formen, thematische Zeitschrift 1 (1918), S 149–162 (S. 161); Berichtigung, ebenda, S. 428.

[2]) $\bar{x}$ bedeutet die zu x konjugierte komplexe Zahl.

Ein zu letzterem analoger Satz für Potenzreihen lautet[3]):

Satz B. Die Potenzreihe

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

ist dann und nur dann für $|z| < 1$ konvergent und beschränkt, wenn die Bilinearform

$$\sum_{\nu \leq \mu} c_{\mu-\nu} x_\nu y_\mu \quad \left(\sum |x_\nu|^2 \leqq 1, \ \sum |y_\nu|^2 \leqq 1\right)$$

beschränkt ist. Die obere Grenze der Potenzreihe ist genau gleich der oberen Grenze der Bilinearform.

Indessen besitzt der Satz B nicht die Vollkommenheit wie Satz A, insofern als der Wertevorrat der Potenzreihe hierdurch nur mangelhaft charakterisiert ist. Einen tieferen Zusammenhang zwischen Potenzreihe und Bilinearform liefert der folgende Satz:

Satz C. Der kleinste konvexe Bereich, der den Wertevorrat der Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ für $|z| < 1$ umschließt, ist identisch mit dem Wertevorrat der unendlichvielen Bilinearformen

$$\sum_{\nu \leq \mu}^{0,n} c_{\mu-\nu} x_\nu y_\mu \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{für } y_\nu = \bar{x}_\nu \text{ und } \sum_{\nu=0}^{n} |x_\nu|^2 = 1.$$

Herr Toeplitz[4]) fand diesen Satz mit Hilfe seiner Theorie der L-Formen, das sind Bilinearformen der Gestalt $\sum c_{\mu-\nu} x_\nu y_\mu$, wo ν, μ von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen. Ich gelangte unabhängig hiervon zu dem Satze auf demselben Wege wie zum Beweise des Satzes A in meiner unter [1]) zitierten Arbeit. Angeregt durch die Arbeit des Herrn Toeplitz, habe ich dann meine Untersuchung weiter ausgedehnt (vgl. insbes. § 3).

Grundlegend für das Folgende ist, ebenso wie in meiner unter [1]) zitierten Arbeit, eine von Herrn Fejér herrührende Parameterdarstellung der nichtnegativen trigonometrischen Polynome. Es werden sich übrigens sowohl Satz A wie Satz C als Spezialfälle aus einer allgemeineren Überlegung ergeben.

---

[3]) Vgl. I. Schur, Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind, Journal für Mathematik 147 (1917), S. 205–232; 148 (1918), S. 122–145 (insbes. Bd. 147, S. 226, Satz X). Man vgl. auch O. Szász, Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe, Mathematische Zeitschrift 1 (1918), S. 163–183 (§ 2).

[4]) O. Toeplitz, Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejér, Mathematische Zeitschrift 2 (1918), S. 187–197 (S. 197).

§ 1.

Über nichtnegative trigonometrische Polynome und gewisse Bilinearformen.

Satz I. *Gegeben seien $2n+1$ beliebige (reelle oder komplexe) Zahlen*

$$c_{-n}, c_{-n+1}, \ldots, c_0, \ldots, c_n;$$

(fortan ist also i. a.: $c_{-\nu} \neq \bar{c}_\nu$)

dem Polynom höchstens n-ten Grades $f(z) = \sum_{\nu=0}^{n} t_\nu z^\nu$ mit beliebigen Koeffizienten, das der Bedingung genügt

$$t_0 = 1, \quad \Re \sum_{\nu=0}^{n} t_\nu e^{\nu\varphi i} \geqq 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq \varphi < 2\pi,$$

i die Zahl

$$A_f = c_0 t_0 + \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} (c_\nu t_\nu + c_{-\nu} \bar{t}_\nu)$$

geordnet. Die Gesamtheit dieser Zahlen A_f ist identisch mit dem Wertevorrat der bilinearen Form $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} c_{\mu-\nu} x_\nu y_\mu = A(x, y)$ für $y_\nu = \bar{x}_\nu$ und $\sum_{0}^{n} |x_\nu|^2 = 1$.

Vorbemerkung. Setzt man

$$t_\nu = \lambda_\nu - \mu_\nu i \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n),$$

geht die Bedingung (3) in

$$1 + \sum_{\nu=1}^{n} (\lambda_\nu \cos \nu\varphi + \mu_\nu \sin \nu\varphi) \geqq 0, \qquad 0 \leqq \varphi < 2\pi$$

ber und unser Satz stellt eine Beziehung zwischen den nichtnegativen igonometrischen Polynomen und der Bilinearform $\sum_{\nu,\mu}^{0,n} c_{\mu-\nu} x_\nu y_\mu$ fest. ierbei wird stets $y_\nu = \bar{x}_\nu$ und $\sum_{\nu=0}^{n} |x_\nu|^2 = 1$ angenommen und die Ge-mtheit der Werte $A(x, \bar{x}) = \sum_{\nu,\mu}^{0,n} c_{\mu-\nu} x_\nu x_\mu$ $\left(\text{für } \sum_{\nu=0}^{n} |x_\nu|^2 = 1\right)$ sodann mit errn Toeplitz kurz als *der Wertevorrat der Bilinearform $A(x, y)$* bezeichnet.

Beim Beweise spielt der folgende von Herrn Fejér[5]) herrührende Satz ne wichtige Rolle:

[5]) L. Fejér, Über trigonometrische Polynome, Journal für Mathematik 146 915), S. 53–82 (S. 55–59).

Satz D. Es sei

$$\tau(\varphi) = \lambda_0 + \lambda_1 \cos\varphi + \mu_1 \sin\varphi + \ldots + \lambda_n \cos n\varphi + \mu_n \sin n\varphi$$

ein nichtnegatives trigonometrisches Polynom n-ter Ordnung, dann gibt es ein rationales Polynom n-ten Grades

$$u(z) = u_0 + u_1 z + \ldots + u_n z^n,$$

so daß identisch in φ die Gleichung besteht

$$|u(z)|^2_{z=e^{\varphi i}} = |u(e^{\varphi i})|^2 = \tau(\varphi). \tag{5}$$

Ein Beweis dieses Satzes ergibt sich sehr einfach aus einer längst bekannten Faktorenzerlegung beliebiger trigonometrischer Polynome. Es ist nämlich

$$\tau(\varphi) = \Re \sum_{\nu=0}^{n} t_\nu e^{\nu\varphi i} = \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{n} t_\nu e^{\nu\varphi i} + \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{n} \bar{t}_\nu e^{-\nu\varphi i}, \qquad t_\nu = \lambda_\nu - \mu_\nu i,$$

also

$$\begin{aligned} 2\tau(\varphi) &= e^{-n\varphi i}(\bar{t}_n + \bar{t}_{n-1} e^{\varphi i} + \ldots + \bar{t}_1 e^{(n-1)\varphi i} + 2t_0 e^{n\varphi i} + \ldots + t_n e^{2n\varphi i}) \\ &= z^{-n}(\bar{t}_n + \bar{t}_{n-1} z + \ldots + t_n z^{2n}) \qquad (z = e^{\varphi i}); \end{aligned}$$

oder abkürzend

$$2z^n \tau(\varphi) = G(z) \qquad (z = e^{\varphi i}).$$

Nun seien

$$\left.\begin{array}{c} r_1 e^{\alpha_1 i}, r_2 e^{\alpha_2 i}, \ldots, r_\varkappa e^{\alpha_\varkappa i} \\ \frac{1}{r_1} e^{\alpha_1 i}, \frac{1}{r_2} e^{\alpha_2 i}, \ldots, \frac{1}{r_\varkappa} e^{\alpha_\varkappa i} \\ e^{\beta_1 i}, \quad e^{\beta_2 i}, \ldots, \quad e^{\beta_{2\lambda} i} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} r_1 < 1, \ldots, r_\varkappa < 1 \\ 2(\varkappa + \lambda) = 2n \end{array}$$

die $2n$ Wurzeln der Gleichung $G(z) = 0$[6]), dann ist

$$2z^n \tau(\varphi) = t_n \prod_{\nu=1}^{\varkappa} (e^{\varphi i} - r_\nu e^{\alpha_\nu i})(e^{\varphi i} - \frac{1}{r_\nu} e^{\alpha_\nu i}) \prod_{\nu=1}^{2\lambda} (e^{\varphi i} - e^{\beta_\nu i})$$

oder

$$2\tau(\varphi) = k_1 \prod_{\nu=1}^{\varkappa} (e^{(\varphi - \alpha_\nu) i} - r_\nu)(r_\nu - e^{(\alpha_\nu - \varphi) i}) \prod_{\nu=1}^{2\lambda} (e^{\frac{1}{2}(\varphi - \beta_\nu) i} - e^{-\frac{1}{2}(\varphi - \beta_\nu) i}),$$

wo k_1 eine Konstante bedeutet. Also, wenn k_2 wieder eine Konstante bedeutet

$$\tau(\varphi) = k_2 \prod_{\nu=1}^{\varkappa} [1 - 2r_\nu \cos(\varphi - \alpha_\nu) + r_\nu^2] \cdot \prod_{\nu=1}^{2\lambda} \sin \tfrac{1}{2}(\varphi - \beta_\nu). \tag{6}$$

---

[6]) Diese Gleichung besitzt offenbar mit $re^{\alpha i}$ zugleich $\frac{1}{r} e^{\alpha i}$ als Wurzel.

Ist nun $\tau(\varphi) \geqq 0$ für alle φ, so müssen offenbar die Nullstellen β_ν gerader Vielfachheit auftreten, so daß wir setzen können

$$\tau(\varphi) = k_2 \prod_{\nu=1}^{\varkappa} [1 - 2 r_\nu \cos(\varphi - \alpha_\nu) + r_\nu^2] \prod_{\nu=1}^{\lambda} \sin^2 \frac{\varphi - \beta_\nu}{2}.$$

achtet man noch, daß jetzt $k_2 > 0$ und

$$1 - 2 r_\nu \cos(\varphi - \alpha_\nu) + r_\nu^2 = |1 - r_\nu e^{-\alpha_\nu i} z|^2_{z=e^{\varphi i}},$$

$$\sin^2 \frac{\varphi - \beta_\nu}{2} = \tfrac{1}{4} |1 - e^{-\beta_\nu i} z|^2_{z=e^{\varphi i}},$$

erhält man aus (7) nach Zusammenfassung der Linearfaktoren in z die wünschte Darstellung (5)[7]).

Der Beweis des Satzes I ergibt sich nun mit Hilfe der Darstellung (5) hr einfach. Diese lautet nämlich ausführlicher geschrieben:

$$\sum_{\nu=0}^{n} t_\nu e^{\nu\varphi i} = \tfrac{1}{2}\left(\sum_{\nu=0}^{n} t_\nu e^{\nu\varphi i} + \sum_{\nu=0}^{n} \bar{t}_\nu e^{-\nu\varphi i}\right) = \left(\sum_{\nu=0}^{n} u_\nu e^{\nu\varphi i}\right)\left(\sum_{\nu=0}^{n} \bar{u}_\nu e^{-\nu\varphi i}\right);$$

ernach lassen die t_ν die Darstellung zu:

$$t_0 = 1 = \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu \bar{u}_\nu, \quad \tfrac{1}{2} t_\varkappa = u_\varkappa \bar{u}_0 + u_{\varkappa+1} \bar{u}_1 + \ldots + u_n \bar{u}_{n-\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots n)$$

tzt man nun diese Ausdrücke für die t_ν in A_f ein, so wird

$$A_f = c_0 \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu \bar{u}_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu (u_\nu \bar{u}_0 + u_{\nu+1} \bar{u}_1 + \ldots u_n \bar{u}_{n-\nu})$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n} c_{-\nu} (\bar{u}_\nu u_0 + \bar{u}_{\nu+1} u_1 + \ldots + \bar{u}_n u_{n-\nu}) = \sum_{\nu,\mu=0}^{n} c_{\mu-\nu} u_\mu \bar{u}_\nu.$$

[7]) Dieser Beweis unterscheidet sich nur in der Darstellung von dem F. Riesz-hen Beweis, den Herr Fejér ausführte. Er gründet sich offenbar im wesentlichen f die Faktorenzerlegung (6); es ist daher von historischem Interesse zu bemerken, ß diese Faktorenzerlegung schon P. A. Hansen hergeleitet hat. Man vgl. Hansen, émoire sur le calcul des perturbations q'éprouvent les comètes. Supplément aux mptes rendus des séances de l'académie des sciences, Bd. I, Paris 1856, S. 121–378 nsb. S. 209–229). — Hierauf nimmt Hansen auch in seiner Arbeit Bezug: Aus-nandersetzung einer zweckmäßigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen r kleinen Planeten. Erste Abhandlung, 1856; Abhandlungen der Königl. Sächs. esellschaft d. Wissensch. zu Leipzig V, Math.-phys. Kl. III (1857), S. 41–218 nsb. S. 57 und S. 140). — Die obige Herleitung der Formel (6) hat Stieltjes seiner Arbeit gegeben: De la transformation de la fonction périodique $+ A_1 \cos\varphi + B_1 \sin\varphi + \ldots + A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi$, Nieuw Archief voor Wiskunde IX 882), S. 111–116; Werke I, S. 99–104.

Hieraus folgt unmittelbar, daß man die Gesamtheit der Zahlen A_f erhält wenn man in $A(x, \bar{x})$ alle Wertsysteme $x_1, \dots x_n$ einsetzt, die der Bedingung $\sum_{\nu=0}^{n} |x_\nu|^2 = 1$ genügen. Damit ist der Satz I bewiesen. Für $c_{-\nu} = \bar{c}_\nu$ reduziert sich dieser Satz auf Satz I meiner unter [1]) zitierten Arbeit.

Bemerkung. Die Zahlenmenge (4) ist identisch mit der scheinbar allgemeineren Menge, die entsteht, wenn ich dem Polynom $f(z)$ nicht die Zahl A_f, sondern den ganzen Zahlbereich

$$(9) \qquad c_0 + \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} (c_\nu t_\nu \varrho^\nu e^{\nu\psi i} + c_{-\nu} \bar{t}_\nu \varrho^\nu e^{-\nu\psi i}), \quad 0 \leq \psi < 2\pi, \quad 0 \leqq \varrho \leqq 1$$

zuordne; denn es ist wegen (3) auch

$$1 + \Re \sum_{\nu=1}^{n} t_\nu \varrho^\nu e^{\nu\psi i} e^{\nu\varphi i} \geqq 0; \qquad 0 \leqq \varphi < 2\pi,$$

also gehört (9) zur Gesamtheit der Zahlen A_f.

Hieraus folgt nach Satz I der

Satz II. *Der Wertevorrat der Bilinearform*

$$\sum_{\nu,\mu=0}^{n} c_{\mu-\nu} \varrho^{|\nu-\mu|} x_\nu y_\mu \quad \textit{für ein} \quad 0 < \varrho < 1, \quad y_\nu = \bar{x}_\nu, \quad \sum_{\nu=0}^{n} |x_\nu|^2 = 1$$

ist im Wertevorrat der Bilinearform $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} c_{\mu-\nu} x_\nu y_\mu$ *für* $y_\nu = \bar{x}_\nu$ *und* $\sum_{\nu=0}^{n} |x_\nu|^2 = 1$ *enthalten.*

Der Zahlbereich (9) stellt offenbar für $\varrho = 1$ den Wertevorrat des Laurentschen Polynoms

$$c_0 + \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} (c_\nu t_\nu z^\nu + c_{-\nu} \bar{t}_\nu z^{-\nu}) \qquad (|z| = 1)$$

auf dem Einheitskreise dar; oder auch den Wertevorrat des trigonometrischen Polynoms mit komplexen Koeffizienten:

$$c_0 + \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} (c_\nu t_\nu + c_{-\nu} \bar{t}_\nu) \cos \nu\varphi + \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} (c_\nu t_\nu - c_{-\nu} \bar{t}_\nu) \sin \nu\varphi .$$

Die Zahlenmenge (4) bildet einen konvexen Bereich. Denn es sei ϑ eine positive Zahl, die der Bedingung $0 < \vartheta < 1$ genügt; und es seien

$$A_f = c_0 t_0 + \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} (c_\nu t_\nu + c_{-\nu} \bar{t}_\nu)$$

$$A_g = c_0 \tau_0 + \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} (c_\nu \tau_\nu + c_{-\nu} \bar{\tau}_\nu)$$

ei Zahlen, die zu (4) gehören. Dann ist leicht nachweisbar, daß auch die Zahl

)) $$\vartheta A_f + (1-\vartheta) A_g = c_0 [\vartheta t_0 + (1-\vartheta)\tau_0] + \\ + \tfrac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} [c_r (\vartheta t_r + (1-\vartheta)\tau_r) + c_{-r} (\vartheta \bar{t}_r + (1-\vartheta)\bar{\tau}_r)]$$

(4) gehört. Nach Voraussetzung ist nämlich

$$t_0 = 1, \quad \Re \sum_{r=0}^{n} t_r e^{r\varphi i} \geqq 0, \quad 0 \leqq \varphi < 2\pi$$

$$\tau_0 = 1, \quad \Re \sum_{r=0}^{n} \tau_r e^{r\varphi i} \geqq 0, \quad 0 \leqq \varphi < 2\pi;$$

raus folgt

$$_0 + (1-\vartheta)\tau_0 = 1, \quad \Re \sum_{r=0}^{n} (\vartheta t_r + (1-\vartheta)\tau_r) e^{r\varphi i} \geqq 0, \quad 0 \leqq \varphi < 2\pi,$$

o gehört die Zahl (10) zu (4). Damit ist der Satz bewiesen:

Satz III. *Der Wertevorrat der Bilinearform* $\sum_{r,\mu=0}^{n} c_{\mu-r} x_r y_\mu$ *für* $y_r = \bar{x}_r$ d $\sum_{r=0}^{n} |x_r|^2 = 1$ *ist ein konvexer Bereich*[8]).

---

[8]) Herr Toeplitz hat sich (a. a. O. [4]) mit dem Wertevorrat einer beliebigen linearform $C(x,y) = \sum_{r,\mu=0}^{n} c_{r\mu} x_r y_\mu$ beschäftigt und für eine Klasse von Bilinear- rmen nicht nur die Konvexität des Wertevorrats, sondern auch einen engen Zu- mmenhang zwischen dem Wertevorrat und den Eigenwerten der Bilinearform be- esen. Es gilt demnach der Satz:

Wenn die Bilinearform $C(x,y)$ mit ihrer begleitenden Form $\overline{C}'(x,y) = \sum_{r,\mu=0}^{n} \bar{c}_{\mu r} x_r y_\mu$ rtauschbar ist (sie heiße dann nach Toeplitz normal), so ist der Wertevorrat von $(x,\bar{x})$ für $\sum_{r=0}^{n} |x_r|^2 = 1$ identisch mit dem kleinsten konvexen Bereich, der alle genwerte von $C(x,y)$ umschließt.

Herr Toeplitz hat bewiesen, daß die L-Form $\sum_{r,\mu=-\infty}^{\infty} c_{\mu-r} x_r y_\mu$ normal ist; an beachte aber, daß dies von der oben betrachteten endlichen Form im allgemeinen cht gilt. Nach einem zweiten Toeplitzschen Satz ist jedenfalls der äußere Rand s Wertevorrats einer beliebigen Bilinearform C eine konvexe Kurve.

Zusatz bei der Korrektur. Daß der Wertevorrat von C, wie Herr Toeplitz rmutete, *stets* ein konvexer Bereich ist, hat Herr F. Hausdorff in einer in dieser itschrift [Bd. 3 (1919), S. 314–316] erschienenen Note „Der Wertvorrat einer Bilinear- rm", von der ich kürzlich durch die Freundlichkeit der Schriftleitung Kenntnis hmen konnte, bewiesen. (d. 26. 3. 19.)

§ 2.

Über den Wertevorrat von Potenzreihen und zugehörigen Bilinearformen

Wir betrachten jetzt eine unendliche Zahlenfolge

$$c_\nu, \text{ wo } \nu \text{ von } -\infty \text{ bis } +\infty \text{ läuft,}$$

und bilden die Zahlemenge $M_n(\varrho)$:

$$(11)\quad c_0 + \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}(c_\nu t_\nu \varrho^\nu e^{\nu\psi i} + c_{-\nu}\bar{t}_\nu \varrho^\nu e^{-\nu\psi i}), \quad 0 \leqq \psi < 2\pi, \quad (n = 1, 2, 3,$$

wo $1, t_1, \ldots, t_n$ die Koeffizienten irgendeines Polynoms sind, das der Bedingung (3) genügt. Die Gesamtheit (Vereinigungsmenge) der Mengen $M_1(\varrho), M_2(\varrho), \ldots$ sei mit M_ϱ bezeichnet; nach dem Vorhergehenden stimmt diese Menge mit dem Wertevorrat der unendlichvielen Bilinearformen

$$\sum_{\nu,\mu=0}^{n} c_{\mu-\nu}\varrho^{|\mu-\nu|} x_\nu y_\mu, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

überein. Diese Menge bildet einen konvexen Bereich; man erkennt dies an der Darstellung (11) ähnlich wie in § 1 für die Zahlenmenge der A_f, oder auch daran, daß $M_n(\varrho)$ ein konvexer Bereich ist, der offenbar $M_{n-1}(\varrho)$ enthält.

Nun seien die Potenzreihen

$$\sum c_\nu z^\nu \qquad \sum c_{-\nu} z^\nu \qquad \text{für } |z| < 1 \text{ konvergent.}$$

Der Bereich M_ϱ mit Einschluß seines Randes (von dem ich nicht weiß, ob er zu M_ϱ gehört, sei mit M'_ϱ bezeichnet.

Offenbar ist die Zahlenmenge

$$\sigma_n = c_0 + \sum_{\nu=1}^{n}\left(c_\nu \frac{n-\nu+1}{n+1}\varrho^\nu e^{\nu\psi i} + c_{-\nu}\frac{n-\nu+1}{n+1}\varrho^\nu e^{-\nu\psi i}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

in M_ϱ enthalten, denn es ist bekanntlich

$$1 + 2\,\Re\sum_{\nu=1}^{n}\frac{n-\nu+1}{n+1}e^{\nu\psi i} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\right)^2 \geqq 0 \qquad (0 \leqq \varphi < 2\pi).$$

Nun ist

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(c_\nu\varrho^\nu e^{\nu\psi i} + c_{-\nu}\varrho^\nu e^{-\nu\psi i})$$

her sind die Werte der Reihe

$$c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (c_\nu z^\nu + c_{-\nu} z^{-\nu})\, \varrho^\nu \quad \text{für } |z| = 1$$

M'_ϱ enthalten. Da ferner M'_ϱ ein abgeschlossener konvexer Bereich ist, können wir auch sagen:

Der kleinste konvexe Bereich $\mathfrak{K}_\varrho$, der den Wertevorrat der Laurent-

he $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \varrho^{|\nu|} z^\nu = L(z)$ auf dem Einheitskreise umschließt, ist in M'_ϱ thalten.

Ich zeige jetzt, daß umgekehrt auch M'_ϱ in $\mathfrak{K}_\varrho$ enthalten ist. Es ist mlich

$$c_\nu \varrho^{|\nu|} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{L(z)}{z^{\nu+1}}\, dz$$

i Integration über den Einheitskreis in positivem Sinne; hieraus folgt

$$c_{\mu-\nu} \varrho^{|\mu-\nu|} x_\nu \bar{x}_\mu = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{L(z)}{z} \left(\sum_{\nu,\mu=0}^{n} \frac{x_\nu \bar{x}_\mu}{z^{\mu-\nu}} \right) dz = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{L(z)}{z} \left| \sum_{\nu=0}^{n} x_\nu z^\nu \right|^2 dz,$$

er

$$2) \qquad A_\varrho(x, \bar{x}) = \sum_{\nu,\mu=0}^{n} c_{\mu-\nu} \varrho^{|\mu-\nu|} x_\nu \bar{x}_\mu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L(e^{\varphi i}) \left| \sum_{\nu=0}^{n} x_\nu e^{\nu\varphi i} \right|^2 d\varphi.$$

un lautet aber ein im wesentlichen von Weierstraß herrührender Satz[9]):

Sind die reellen Funktionen $x(\varphi)$, $y(\varphi)$ und $\vartheta(\varphi)$ der reellen Va-ablen φ beschränkt und integrabel, ist ferner $\vartheta(\varphi)$ nichtnegativ, so liegt r durch die Koordinaten

$$X = \frac{\int_a^b x(\varphi)\, \vartheta(\varphi)\, d\varphi}{\int_a^b \vartheta(\varphi)\, d\varphi},$$

$$Y = \frac{\int_a^b y(\varphi)\, \vartheta(\varphi)\, d\varphi}{\int_a^b \vartheta(\varphi)\, d\varphi}$$

finierte Punkt im kleinsten konvexen Bereiche, der die Kurve mit den leichungen

$$x = x(\varphi), \qquad y = y(\varphi), \qquad a \leqq \varphi \leqq b$$

thält.

[9]) Vgl. L. Fejér, Über gewisse durch die Fouriersche und Laplacesche ihe definierte Mittelkurven und Mittelflächen. Rendiconti del Circolo Matematico di lermo 38 (1914), S. 79–97 (S. 83–84).

Wendet man diesen leicht beweisbaren Satz auf (12) mit

$$a=0, \qquad b=2\pi, \qquad x(\varphi)+iy(\varphi)=L(e^{\varphi i}) \qquad \vartheta(\varphi)=\left|\sum_{\nu=0}^{n} x_\nu e^{\nu\varphi i}\right|$$

an, so erhält man, daß $A_\varrho(x,\bar{x})$ im kleinsten konvexen Bereich $\mathfrak{K}_\varrho$ liegt der den Wertevorrat der Laurentreihe $L(z)$ für $|z|=1$ umschließt; also M_ϱ' liegt in $\mathfrak{K}_\varrho$. Beachtet man noch, daß M_ϱ' identisch sein muß mit dem Wertevorrat der unendlichen Bilinearform

$$\sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} c_{\mu-\nu}\varrho^{|\mu-\nu|}x_\nu y_\mu \quad \text{für} \quad y_\nu=\bar{x}_\nu, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty}|x_\nu|^2=1,$$

da dieser Wertevorrat wegen der Stetigkeit der Bilinearform abgeschlossen ist, so kann man den Satz aussprechen:

Satz IV. *Der kleinste konvexe Bereich, der den Wertevorrat der Laurentreihe*

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \varrho^{|\nu|}z^\nu \quad \textit{für} \quad |z|=1 \qquad (0<\varrho<1$$

umschließt, ist identisch mit dem Wertevorrat der unendlichen Bilinearform

$$\sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} c_{\mu-\nu}\varrho^{|\mu-\nu|}x_\nu y_\mu \quad \textit{für} \quad y_\nu=\bar{x}_\nu \quad \textit{und} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty}|x_\nu|^2=1.$$

Es soll nun ϱ die Werte von 0 bis 1 durchlaufen. Nach Satz II ist die Gesamtheit der $M_n(\varrho)$ für $0\leqq\varrho\leqq 1$ (bei festem n) identisch mit dem Wertevorrat der Bilinearform $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} c_{\mu-\nu}x_\nu y_\mu$, also kurz mit $M_n(1)$. $M_n(\varrho)$ ist enthalten in $M_n(\varrho')$ für $\varrho<\varrho'\leqq 1$. Daher ist auch $M'(\varrho)$ in $M'(\varrho')$ enthalten und die Gesamtheit der $M'(\varrho)$ für $0\leqq\varrho<1$ mit Einschluß des Randes ist identisch mit der Vereinigungsmenge der $M_n(1)$ $(n=1,2,\ldots)$ mit Einschluß des Randes[10]. Das heißt es gilt der

Satz V. *Der kleinste konvexe Bereich, der den Wertevorrat der Reihe*

$$c_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}(c_\nu z^\nu+c_{-\nu}\bar{z}^\nu) \quad \text{für} \quad |z|<1$$

enthält, ist identisch mit dem Wertevorrat der unendlich-vielen Bilinearformen

$$\sum_{\nu,\mu=0}^{n} c_{\mu-\nu}x_\nu y_\mu, \quad n=1,2,3,\ldots, \quad y_\nu=\bar{x}_\nu, \quad \sum_{\nu=0}^{n}|x_\nu|^2=1$$

mit Einschluß des Randes.

[10]) Es ist klar daß die Bereiche $M_n(1)$ ineinandergeschachtelt sind.

Für $c_{-\nu} = 0$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ erhält man den

Satz VI. *Der kleinste konvexe Bereich $\mathfrak{K}$ der den Wertevorrat der Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ für $|z| < 1$ umschließt, ist identisch mit dem Wertevorrat der unendlichvielen Bilinearformen*

$$\sum_{\nu \leqq \mu}^{0,n} c_{\mu-\nu} x_\nu y_\mu \quad \text{für} \quad y_\nu = \bar{x}_\nu, \quad \sum_{\nu=0}^{n} |x_\nu|^2 = 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Für $c_{-\nu} = \bar{c}_\nu$ erhält man den Satz A. Das heißt man erhält die zur x-Achse parallelen *Stützgeraden* des kleinsten konvexen Bereiches Q in der $x + yi$-Ebene, der den Wertevorrat der Potenzreihe $\frac{c_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu z^\nu$ reell) umschließt. Man kann auch sagen: die Projektion des Bereiches Q f die x-Achse ist identisch mit dem Wertevorrat der unendlichvielen ermiteschen Formen

$$\frac{1}{2} \sum_{\nu,\mu=0}^{n} c_{\mu-\nu} x_\nu \bar{x}_\mu, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \quad \sum_{\nu=0}^{n} |x_\nu|^2 = 1, \quad c_{-\nu} = \bar{c}_\nu.$$

nalog kann man die Stützgeraden in irgendeiner Richtung bestimmen. llen die Stützgeraden mit der x-Achse den Winkel $\frac{\pi}{2} + \vartheta$ bilden $-\frac{\pi}{2} \leqq \vartheta < \frac{\pi}{2}\Big)$, so braucht man nur auf die Potenzreihe $e^{-\vartheta i} \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu z^\nu$ n Satz A anzuwenden, oder — was damit gleichbedeutend ist — in tz V $c_0 = 0$, $e^{-\vartheta i} c_\nu$ an Stelle von c_ν und $e^{\vartheta i} c_\nu$ an Stelle von $c_{-\nu}$ zu tzen. Man erhält dann, daß der Wertevorrat der unendlichvielen ermiteschen Formen

$$\frac{1}{2} e^{-\vartheta i} \sum_{\nu<\mu}^{0,n} c_{\mu-\nu} x_\nu \bar{x}_\mu + \frac{1}{2} e^{\vartheta i} \sum_{\nu<\mu}^{0,n} c_{\mu-\nu} \bar{x}_\nu x_\mu = \Re e^{-\vartheta i} \sum_{\nu<\mu} c_{\mu-\nu} x_\nu \bar{x}_\mu$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

entisch ist mit dem Wertevorrat von

$$\Re e^{-\vartheta i} \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu z^\nu \quad \text{für} \quad |z| < 1,$$

as um $\frac{c_0}{2}$ verschoben die gesuchten Stützgeraden liefert.

Aus Satz VI folgt insbesondere:

Der Wertevorrat der Potenzreihe $\sum_{0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ für $|z| < 1$ ist dann und ur dann ein konvexer Bereich $\mathfrak{K}$, wenn er mit dem Wertevorrat der endlichvielen Bilinearformen

$$\sum_{\nu \leqq \mu}^{0,n} c_{\mu-\nu} x_\nu y_\mu, \quad y_\nu = \bar{x}_\nu, \quad \sum_{\nu=0}^{n} |x_\nu|^2 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots$$

übereinstimmt. Speziell gehören dann die arithmetischen Mittel der Partialsummen

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \cdot \frac{n-\nu+1}{n+1} z^\nu \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots, \quad |z| < 1$$

dem Wertevorrat der Potenzreihe an[11]) und sie liegen offenbar in $\S$ überall dicht.

§ 3.

Erweiterung auf mehrdimensionale Bereiche.

Setzt man

$$\sum_{\nu,\mu=0}^{n} c_{\mu-\nu} x_\nu y_\mu = \sum_{\nu,\mu=0}^{n} \frac{c_{\mu-\nu} + \bar{c}_{\nu-\mu}}{2} x_\nu y_\mu + i \sum_{\nu,\mu=0}^{n} \frac{i\bar{c}_{\nu-\mu} - i c_{\mu-\nu}}{2} x_\nu y_\mu =$$

$$= H_1(x, y) + i H_2(x, y),$$

so sind H_1 und H_2 Hermitesche Formen; setzt man ferner

$$c_\nu + \bar{c}_{-\nu} = 2\alpha_\nu, \quad i c_{-\nu} - i c_\nu = 2\beta_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots n$$

so wird

$$A_f = \alpha_0 t_0 + \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu t_\nu + \bar{\alpha}_\nu \bar{t}_\nu) + i \left[\beta_0 t_0 + \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} (\beta_\nu t_\nu + \bar{\beta}_\nu \bar{t}_\nu) \right],$$

und man kann den wesentlichen Inhalt des § 1 so aussprechen:

Es seien α_0, β_0 reelle, $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n$ beliebige Zahlen und es bedeute $\alpha_{-\nu} = \bar{\alpha}_\nu$, $\beta_{-\nu} = \bar{\beta}_\nu$, $t_{-\nu} = \bar{t}_\nu$ die zu α_ν bzw. β_ν, t_ν konjugierte komplexe Zahl. Jedem Polynom höchstens n-ten Grades $f(z) = \sum_{\nu=0}^{n} t_\nu z^\nu$, das der Bedingung (3) genügt, sei das reelle Zahlenpaar

$$(13) \qquad \begin{cases} v_1(f) = \alpha_0 t_0 + \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu t_\nu + \alpha_{-\nu} t_{-\nu}), \\ v_2(f) = \beta_0 t_0 + \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} (\beta_\nu t_\nu + \beta_{-\nu} t_{-\nu}) \end{cases}$$

[11]) Man vgl. auch L. Fejér, a. a. O. [9]), S. 87, Theorem III.

eordnet. v_1, v_2 seien als reelle Koordinaten eines Punktes in der Ebene eutet; desgleichen sollen die Werte der Hermiteschen Formen

$$u_1 = H_1(x, \bar{x}) = \sum_{\nu,\mu=0}^{n} \alpha_{\mu-\nu} x_\nu \bar{x}_\mu, \quad u_2 = H_2(x, \bar{x}) = \sum_{\nu,\mu=0}^{n} \beta_{\mu-\nu} x_\nu \bar{x}_\mu$$

Koordinaten eines Punktes bedeuten. Die Gesamtheit der Punkte (13) identisch mit dem Bereich, den die Punkte (14) erfüllen, wenn die x_ν äß der Einschränkung $\sum_{\nu=0}^{n} |x_\nu|^2 = 1$ variieren. Dieser Bereich ist konvex.

Anstatt zweier Hermitescher Formen betrachte ich jetzt p Hermitee Formen

$$= H_\varkappa(x, \bar{x}) = \sum_{\nu,\mu=0}^{n} c_{\mu-\nu}^{(\varkappa)} x_\nu \bar{x}_\mu, \quad c_{-\nu}^{(\varkappa)} = \overline{c_\nu^{(\varkappa)}}, \quad \sum_{\nu=0}^{n} |x_\nu|^2 = 1 \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots p)$$

deute $u_1, u_2, \ldots, u_p$ als die reellen Koordinaten eines Punktes im ume von p Dimensionen (R_p). Dann läßt sich analog beweisen der

Satz VII. *Es seien*

$$H_\varkappa(x, \bar{x}) = \sum_{\nu,\mu=0}^{n} c_{\mu-\nu}^{(\varkappa)} x_\nu \bar{x}_\mu, \qquad c_{-\nu}^{(\varkappa)} = \overline{c_\nu^{(\varkappa)}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$$

Hermitesche Formen. Die Punkte mit den Koordinaten

$$u_1 = H_1(x, \bar{x}), \quad \ldots, \quad u_p = H_p(x, \bar{x}), \quad \sum_{\nu=0}^{n} |x_\nu|^2 = 1$$

üllen einen Bereich B im R_p. Ferner sei jedem Polynom $f(z) = \sum_{\nu=0}^{n} t_\nu z^\nu$, der Bedingung

$$t_0 = 1, \quad \Re \sum_{\nu=0}^{n} t_\nu e^{\nu\varphi i} \geqq 0 \qquad (0 \leqq \varphi < 2\pi)$$

ügt, der Punkt im R_p

$$v_\varkappa(f) = c_0^{(\varkappa)} t_0 + \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} (c_\nu^{(\varkappa)} t_\nu + c_{-\nu}^{(\varkappa)} t_{-\nu}) \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$$

eordnet. Dann ist die Gesamtheit der Punkte $(v_\varkappa)$ identisch mit dem reich B. Dieser Bereich ist konvex.

Der Beweis verläuft ähnlich wie für den Satz I. Aus (F) folgt so- für $v_\varkappa(f)$ die Darstellung

$$v_\varkappa(f) = \sum_{\nu,\mu=0}^{n} c_{\mu-\nu}^{(\varkappa)} u_\mu \bar{u}_\nu,$$

ier ist die Gesamtheit der Punkte $(v_\varkappa)$ identisch mit der Gesamtheit Punkte $(u_\varkappa)$, wenn die x_ν der Bedingung $\sum_{\nu=0}^{n} |x_\nu|^2 = 1$ gemäß variieren.

Ferner ist dieser Bereich B konvex; denn es sei ϑ eine positive Zahl und $0 < \vartheta < 1$, ferner seien

$$v_\varkappa(f) = c_0^{(\varkappa)} t_0 + \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{n} (c_\nu^{(\varkappa)} t_\nu + c_{-\nu}^{(\varkappa)} t_{-\nu}) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p$$

$$v_\varkappa(g) = c_0^{(\varkappa)} \tau_0 + \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{n} (c_\nu^{(\varkappa)} \tau_\nu + c_{-\nu}^{(\varkappa)} \tau_{-\nu}) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p$$

zwei Punkte aus B. Dann gehört offenbar auch der Punkt

$$v'_\varkappa = \vartheta v_\varkappa(f) + (1 - \vartheta) v_\varkappa(g) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p$$

zu B. Damit ist der Satz VII vollständig bewiesen. Mit der Konvexität ist eine allgemeine Frage des Herrn Toeplitz (die sich auf *beliebige* Hermitesche Formen bezieht)[12]) für unsere speziellen Hermiteschen Formen beantwortet.

Analog der Formel (9) kann man auch hier sagen, daß zugleich mit dem Punkt $(v_\varkappa)$ der Punkt mit den Koordinaten

$$(15) \qquad c_0^{(\varkappa)} t_0 + \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} (c_\nu^{(\varkappa)} t_\nu \varrho^\nu e^{\nu\psi i} + c_{-\nu}^{(\varkappa)} t_{-\nu} \varrho^\nu e^{-\nu\psi i}) \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p$$

für jedes ψ und $0 \leqq \varrho \leqq 1$ zu B gehört. Andererseits ist bei festem ϱ und für $\psi = 0$ die Gesamtheit der Punkte (15) nach Satz VII identisch mit der Punktmenge

$$(16) \quad u_1(\varrho) = \sum_{\nu,\mu=0}^{n} c_{\mu-\nu} \varrho^{|\mu-\nu|} x_\nu \bar{x}_\mu, \quad \ldots, \quad u_p(\varrho) = \sum_{\nu,\mu=0}^{n} c_{\mu-\nu} \varrho^{|\mu-\nu|} x_\nu \bar{x}_\mu,$$

wenn die x_ν gemäß der Bedingung $\sum_{\nu=0}^{n} |x_\nu|^2$ variieren. Also die Punktmenge (16) ist im Bereich B enthalten.

---

[12]) Vgl. O. Toeplitz, a. a. O.[4]), § 5.

(Eingegangen am 21. November 1918.)

emerkungen zu den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und zum Moreraschen Satz.

Von

Hans Rademacher in Wickersdorf (Thüringen).

Genügt eine in einem Gebiete G der Ebene der komplexen Variabeln $= x + iy$ definierte Funktion $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ in G den uchy-Riemannschen Differentialgleichungen, so kann man nach den ssischen Methoden der Funktionentheorie bekanntlich nur dann auf den alytischen Charakter von $f(z)$ schließen, wenn die partiellen Ableitungen n φ und ψ auch *stetig* sind. Ferner, ist auf jedem Rechtecksrand, der nt seinem Innern in G liegt, das über $f(z)$ genommene Cauchysche egral gleich Null, so weiß man nach dem Moreraschen Satze nur n, daß $f(z)$ in G analytisch ist, wenn es dort als *stetig* vorausgesetzt d. Was nun die Cauchy-Riemannschen Gleichungen betrifft, so ist allem Herr de la Vallée Poussin über die klassischen Voraussetzungen ausgegangen, indem er zeigte, daß jede komplexe, in einem Gebiete tige Funktion, deren Real- und Imaginärteil endliche summierbare tielle Derivierte besitzen und deren partielle Ableitungen in einem ßgleichen Kern ihres Existenzbereiches den Cauchy-Riemannschen fferentialgleichungen genügen, im Gebiete analytisch regulär ist[1]). In ser Richtung kann man, immer unter Heranziehung des Lebesgueschen egralbegriffs, noch einige Schritte weiter gehen und dabei vor allem n Moreraschen Satz von einem Teil seiner Voraussetzungen befreien.

1. Da sich ein Gebiet durch abzählbar unendlich viele ganz in ihm gende abgeschlossene Quadrate überdecken läßt, so können wir unsere tersuchungen ohne Einschränkung der Allgemeinheit für ein abgelossenes Quadrat Q: $a \leqq x \leqq c$, $b \leqq y \leqq d$ vornehmen, dessen Seiten

[1]) Vgl. Ch. J. de la Vallée Poussin, Réduction des intégrales doubles de besgue. Application à la définition des fonctions analytiques, Bulletin de cadémie Royale de Belgique (Sciences) 1910, S. 768–798.

den Koordinatenachsen parallel sind. Auf Q sei $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y$ als eine *stetige* Funktion von z gegeben. Ferner sei $f(z)$ bei festem x al Funktion von y und bei festem y als Funktion von x *totalstetig* (ode kurz: es sei „*linear totalstetig*"), d. h. zu jedem x_0

$$a \leqq x_0 \leqq c$$

und zu jedem positiven δ gibt es ein positives $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0)$, so daß fü jede endliche oder abzählbare Folge von linearen, nicht übereinande greifenden Intervallen $(a_n b_n)$ auf der Geraden $x = x_0$ stets

$$\sum_n |f(x_0 + ia_n) - f(x_0 + ib_n)| < \delta$$

ist, sobald nur

$$\sum_n |a_n - b_n| < \varepsilon(\delta, x_0)$$

ist. (Man bemerkt, daß $f(z)$ auf einer Achsenparallelen dann und nu dann totalstetig ist, wenn Real- und Imaginärteil für sich diese Eigen schaft haben.)

Ferner sollen die partiellen Ableitungen von $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y$ auf der meßbaren[2]) Teilmenge K von Q, auf der alle vier zugleic existieren, *summierbar* sein und in einem maßgleichen Kern K^* von K die Gleichungen

$$(1) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

erfüllen.

Die Menge K ist ein maßgleicher Kern von Q. Denn da eine total stetige Funktion einer Variabeln fast überall differenzierbar ist, so kann sich K auf jeder Achsenparallelen höchstens um eine Nullmenge von Q unterscheiden. Nach einem Satz von G. Fubini kann dann aber di Menge $(Q - K)$ insgesamt höchstens eine zweidimensionale Nullmenge sein da sie meßbar ist[3]).

Wegen der Totalstetigkeit von φ in y ist ferner

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = \varphi(x, y_2) - \varphi(x, y_1), \qquad b \leqq y_1 \leqq y_2 \leqq d$$

[2]) Die Menge K ist meßbar, da die partiellen Derivierten nach x der stetige Funktion φ meßbare Funktionen sind, also auf einer meßbaren Menge übereinstimme müssen; analog für die andern Ableitungen; K ist also Durchschnitt von vier meß baren Mengen. Für die Meßbarkeit der partiellen Derivierten genügt es nac C. Carathéodory, Reelle Funktionen, Leipzig 1918, S. 642 Satz 1 und S. 644 Satz die φ und ψ als stetig in jeder Variabeln bei Festhalten der andern anzunehmen wovon wir noch Gebrauch machen werden.

[3]) Vgl. G. Fubini, Sugli integrali multipli, Rendiconti della Reale Accademi dei Lincei (5) 16 (1907), S. 608–614, auch Carathéodory, l. c. [2]) S. 628, Satz 3.

dem $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ dort, wo es etwa nicht existiert, ein beliebiger Wert beigelegt [4]). Folglich existiert auch

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dy = \int_{x_1}^{x_2} [\varphi(x, y_2) - \varphi(x, y_1)]\, dx = -\int_C \varphi(x, y)\, dx,$$

C der Rand des in Q liegenden Rechteckes R

$$x_1 \leqq x \leqq x_2, \qquad y_1 \leqq y \leqq y_2$$

Da ferner die Existenz von

$$\iint_R \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dx\, dy$$

ausgesetzt ist, so folgt nach dem Fubinischen Satz über Doppelgrale[5]) aus (2)

$$\int_C \varphi(x, y)\, dx = -\iint_R \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dx\, dy.$$

Ausführung analoger Umformungen für die andern Ableitungen ergibt ammen:

$$\int_C f(z)\, dz = \int_C \varphi\, dx - \psi\, dy + i \int_C \psi\, dx + \varphi\, dy$$

$$= -\iint_R \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dx\, dy + i \iint_R \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

nun in dem maßgleichen Kern $R \cdot K^*$ von R die Gleichungen (1) erst sind, so ist

$$\int_C f(z)\, dz = 0.$$

s gilt für jeden achsenparallelen Rechtecksrand C in Q. Da ferner) als stetig vorausgesetzt wurde, so ist nach dem Moreraschen Satz) in Q analytisch regulär[6]).

2. Nun sei $g(z)$ eine *beschränkte* komplexe Funktion in G

$$|g(z)| < M,$$

zweidimensional meßbar und auf jeder Parallelen zu einer Achse auch *ear meßbar* sei[7]). Wegen ihrer Beschränktheit ist sie dann auf jeder

[4]) Carathéodory, l. c. [2]) S. 545, Satz 2.

[5]) Vgl. Fubini, l. c. [3]); Carathéodory, l. c. [2]) S. 632, Satz 4.

[6]) W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie I. Bd., 2. Aufl., Leipzig 1912, 02.

[7]) Eine komplexe Funktion soll hier meßbar bzw. summierbar genannt werden, n Real- und Imaginärteil für sich (als reelle Funktionen zweier Variabeln aufßt) meßbar bzw. summierbar sind. Eine meßbare komplexe Funktion ist hier- dann und nur dann summierbar, wenn ihr absoluter Betrag summierbar ist.

Achsenparallelen in Q auch linear summierbar. Ist ferner C irgendei achsenparalleler Rechtecksrand in Q, so soll stets sein:

$$\int_C g(z)\,dz = 0. \tag{6}$$

Wir behaupten, daß $g(z)$ dann in Q regulär analytisch sein muß. In Q also für

$$a \leqq x \leqq c, \qquad b \leqq y \leqq d,$$

bilden wir die Integralfunktion von $g(z)$

$$G(z) = \int_a^x g(\xi + bi)\,d\xi + i\int_b^y g(x + i\eta)\,d\eta. \tag{7}$$

Wegen (6) ist dann ebenfalls

$$G(z) = i\int_b^y g(a + i\eta)\,d\eta + \int_a^x g(\xi + iy)\,d\xi; \tag{8}$$

die Funktion $G(z)$ ist in Q stetig. Denn sei $z_1 = x_1 + iy_1$ ein von verschiedener Punkt in Q, so ist

$$G(z_1) = i\int_b^{y_1} g(a + i\eta)\,d\eta + \int_a^{x_1} g(\xi + iy_1)\,d\xi$$

$$= i\int_b^y g(a+i\eta)\,d\eta + i\int_y^{y_1} g(a+i\eta)\,d\eta + \int_a^x g(\xi+iy_1)\,d\xi + \int_x^{x_1} g(\xi+iy_1)\,d$$

Auf die beiden mittleren Integrale wenden wir (6) an, indem wir, anstat von $a + iy$ über $a + iy_1$ nach $x + iy_1$ zu integrieren, den Integrationsw von $a + iy$ über $x + iy$ nach $x + iy_1$ legen. Das ergibt

$$G(z_1) = i\int_b^y g(a + i\eta)\,d\eta + \int_a^x g(\xi + iy)\,d\xi + i\int_y^{y_1} g(x + i\eta)\,d\eta$$

$$+ \int_x^{x_1} g(\xi + iy_1)\,d\xi = G(z) + i\int_y^{y_1} + \int_x^{x_1}.$$

Also ist

$$G(z_1) - G(z) \leqq \left| i\int_y^{y_1} |g|\,d\eta \right| + \left| \int_x^{x_1} |g|\,d\xi \right| \leqq M(|x_1 - x| + |y_1 - y|),$$

womit die Stetigkeit von $G(z)$ erwiesen ist.

Die Funktion $G(z)$ ist ferner linear totalstetig in x und in y für sic wie aus den Definitionen (7) und (8) durch Integrale ohne weiteres fol Auf jeder zur x-Achse parallelen Strecke gilt, außer höchstens in ei linearen Nullmenge,

$$\frac{\partial G(z)}{\partial x} = g(z), \tag{9}$$

auf jeder zur y-Achse parallelen Strecke gleichfalls bis auf eine lineare
lmenge

)
$$\frac{\partial G(z)}{\partial y} = i g(z)\ ^{8}).$$

aber auf beiden Seiten von (9) und (10) zweidimensional meßbare
ıktionen stehen, so müssen beide Gleichungen zugleich in einem maß-
chen Kern K^* von Q gelten, gemäß einem schon oben ausgeführten
lusse. In K^* ist somit

$$i\frac{\partial G(z)}{\partial x} = \frac{\partial G(z)}{\partial y}.$$

zt man noch

$$G(z) = \Phi(x, y) + i\,\Psi(x, y),$$

ist danach in K^*

)
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

endlich in K^*

)
$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right| \leqq |g(z)| \quad \text{usw.}$$

, so sind infolge der Summierbarkeit von $g(z)$ die partiellen Ableitungen
$G(z)$ über Q summierbar. Damit erfüllt aber $G(z)$ die vier Voraus-
ungen von § 1 und ist also in Q analytisch regulär. Das gleiche gilt
n auch für die Ableitung $\frac{dG}{dz} = g(z)$, was zu beweisen war.

3. Die Ergebnisse von § 1 und § 2 wenden wir nun abwechselnd auf-
ander an, um eine einschränkende Voraussetzung nach der andern auf-
eben.

Statt der Stetigkeit setzen wir von $f(z)$ nur *Beschränktheit* voraus;
übrigen sei $f(z)$ wie in § 1 *linear totalstetig*, und fast überall mit
mierbaren partiellen Ableitungen versehen, die in einem *maßgleichen*
n ihres Existenzbereiches (1) *genügen*.

Die Schlüsse bleiben dann, unter Berücksichtigung von Anmerkung [2])
elben wie oben bis zur Gleichung (4) einschließlich. Dann erfüllt aber
) die vier Bedingungen von $g(z)$ in § 2, da es beschränkt, linear stetig
daher auch zweidimensional meßbar ist und (4) erfüllt. Also ist
) auch unter diesen Bedingungen in Q analytisch regulär.

4. Nun sei über die Beschränktheit von $g(z)$ nichts vorausgesetzt,
ir aber sei die in § 2 definierte *Integralfunktion* $G(z)$ *beschränkt*. Im
gen sei $g(z)$ *summierbar* in Q und auf jeder achsenparallelen Strecke
n *linear summierbar* und *erfülle* (6). Dann genügt $G(z)$ den vier Be-
ungen von $f(z)$ in § 3. Von den Schlüssen in § 2 fällt nämlich nur

[8]) Carathéodory, l. c. [2]) S. 544ff., Satz 1, 2 und 3.

der auf die Stetigkeit von $G(z)$ hin, die wir aber durch § 3 nicht mehr brauchen. Also schließt man wieder auf die analytische Regularität von $G(z)$ und damit auf die von $g(z)$ in Q.

5. Über die Funktion $f(z)$ werde jetzt vorausgesetzt, daß sie *summierbar* sei und daß ihre *Integralfunktion*

$$F(z) = \int_a^x f(\xi + bi)\,d\xi + i\int_b^y f(x + i\eta)\,d\eta$$

in Q *beschränkt* sei. Ferner sei $f(z)$ wie in § 3 *linear totalstetig* und ihre Ableitungen erfüllen dieselben beiden Bedingungen wie dort. Wegen dieser letzten drei Bedingungen bleiben die Schlüsse in § 1 bestehen bis zu (4) einschließlich. Jetzt erfüllt aber $f(z)$ die Voraussetzungen über $g(z)$ in § 4, folglich ist $f(z)$ wiederum analytisch regulär in Q.

6. Jetzt setzen wir endlich über $g(z)$ nur voraus, daß es *summierbar* in Q und auf jeder achsenparallelen Geraden in Q auch *linear summierbar* sei und außerdem (6) *erfülle*. Auch dann können wir behaupten, daß $f(z)$ von analytischem Charakter und regulär in Q sein muß.

Unter diesen Voraussetzungen ist nämlich die Integralfunktion $G(z)$ summierbar über Q und besitzt eine beschränkte Integralfunktion

$$H(z) = \int_a^x G(u + bi)\,du + i\int_b^y G(x + iv)\,dv = i\int_a^x du\int_b^b g(a + i\eta)\,d\eta$$

$$+ \int_a^x du\int_a^u g(\xi + ib)\,d\xi - \int_b^y dv\int_b^v g(a + i\eta)\,d\eta + i\int_b^y dv\int_a^x g(\xi + iv)\,d$$

Das erste Integral verschwindet. Wir schätzen ab

$$|H(z)| \leqq \int_a^c du\int_a^c |g(\xi + ib)|\,d\xi + \int_b^d dv\int_b^d |g(a + i\eta)|\,d\eta + \int_b^d dv\int_c^c |g(\xi + iv$$

Die beiden ersten Glieder sind feste endliche Zahlen, da schon die inneren Integrale in ihnen wegen der linearen Summierbarkeit von g endliche feste Zahlen sind. Das letzte Glied ist aber nach dem Fubinischen Satz, da $|g(z)|$ über Q summierbar ist, gleich

$$\iint_Q |g(\xi + iv)|\,d\xi\,dv,$$

also auch gleich einer endlichen Konstanten, womit die Beschränktheit von $H(z)$ in Q nachgewiesen ist.

Daß $G(z)$ über Q summierbar ist, sieht man folgendermaßen:

$$\iint_Q |G(z)|\,dx\,dy \leqq \iint_Q dx\,dy\int_a^c |g(\xi + bi)|\,d\xi + \iint_Q dx\,dy\int_d^b |g(x + i\eta)|$$

nun $\int_a^c |g(\xi + bi)|\,d\xi$ eine endliche Konstante ist, so ist das erste gral rechts eine endliche feste Zahl. Setzen wir anderseits

$$\iint_Q |g(x+i\eta)|\,dx\,dy = \gamma,$$

γ nach Voraussetzung endlich ist, so ist

$$\int_b^d dy \iint_Q |g(x+i\eta)|\,dx\,d\eta = \gamma(d-b).$$

ses Integral kann man auffassen als das Maß einer „Zylindermenge" A der Höhe $(d-b)$, die über der Basis

$$a \leqq x \leqq c, \quad b \leqq \eta \leqq d, \quad 0 \leqq \zeta \leqq |g(x+i\eta)|$$

chtet ist. Dieselbe Menge A läßt sich aber auch interpretieren als zur Funktion $g(x+i\eta)|$, die als abhängig von x, η und y aufge- werde, gehörende „Ordinatenmenge" über dem Würfel W

$$a \leqq x \leqq c, \quad b \leqq \eta \leqq d, \quad b \leqq y \leqq d.$$

Maß ist das Integral[9])

$$\iiint_W |g(x+i\eta|\,dx\,dy\,d\eta = mA = \gamma(d-b).$$

nun dieses Integral existiert und ferner noch

$$\int_b^d |g(x+i\eta)|\,d\eta$$

jedes x existiert, so kann man nach Fubini die Zerspaltung in zwei einanderfolgende Integrationen vornehmen:

$$\gamma(d-b) = \iint_Q dx\,dy \int_b^d |g(x+i\eta)|\,d\eta.$$

glich ist $G(z)$ in der Tat über Q summierbar.

Damit erfüllt aber $G(z)$ die Voraussetzungen, die in § 5 über $f(z)$ nacht wurden. Denn wenn man die Schlüsse von § 2 wieder durch- t, so findet man, daß $G(z)$ linear totalstetig bleibt, und daß die Eigen- aften seiner Ableitungen ebenfalls bestehen bleiben. Also ist $G(z)$ lytisch regulär in Q und das gleiche gilt von seiner Ableitung $g(z)$. r haben somit den verallgemeinerten Moreraschen Satz:

Satz I. *Ist $g(z)$ eine komplexe Funktion im beschränkten Gebiete G Ebene der $z = x + iy$, deren Real- und Imaginärteil für sich in G*

[9]) Über Zylinder- und Ordinatenmengen und Integrale s. Carathéodory, l. c.[3]) 414 bis 422.

summierbar und auf jeder in G liegenden achsenparallelen Strecke auch linear summierbar sind, und ist für jeden achsenparallelen Rechtecksrand C der samt seinem Innern in G liegt,

$$\int_C g(z)\,dz = 0,$$

so ist $g(z)$ in G regulär analytisch.

7. Hiernach kann man die Schlüsse in § 1 noch einmal revidieren und erhält dann den folgenden Satz über die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

Satz II. *Ist in G die komplexe Funktion $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ summierbar und in x und in y für sich linear totalstetig, sind ferner die fast überall existierenden partiellen Ableitungen von φ und ψ in ihrem Existenzbereich summierbar und erfüllen sie fast überall die Gleichungen*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

so ist $f(z)$ analytisch regulär in G.

Der oben zitierte Satz von de la Vallée Poussin unterscheidet sich von dem soeben abgeleiteten dadurch, daß in ihm die *Endlichkeit* der partiellen Derivierten einerseits, anderseits aber nur Stetigkeit von $f(z)$ vorausgesetzt wird. Er ist in unserem nicht enthalten. Wir können aber Satz I zu einer weiteren Verschärfung des Satzes von de la Valleé Poussin benutzen.

Satz III. *Es sei $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ eine im beschränkten Gebiete G summierbare und in x und in y linear stetige Funktion. Die partiellen Derivierten von φ und ψ seien summierbar, und sie mögen in allen Punkten von G, mit Ausnahme höchstens abzählbar unendlich vieler als endlich vorausgesetzt werden. Genügen dann die partiellen Ableitungen von φ und ψ in einem maßgleichen Kerne ihres Existenzbereiches den Gleichungen (1), so ist $f(z)$ in G analytisch regulär.*

Es reicht wieder hin, $f(z)$ in dem ganz in G gelegenen Quadrat Q zu betrachten. Unter $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ usw. sei dort, wo die partielle Ableitung etwa nicht existiert, die vordere obere Derivierte verstanden. Es sei wieder das Rechteck R

$$x_1 \leqq x \leqq x_2, \quad y_1 \leqq y \leqq y_2$$

beliebig in Q gelegen. Nach dem Fubinischen Satz ist dann

$$\iint_R \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dy,$$

worin rechts das innere Integral höchstens in einer Nullmenge des Inte

s $x_1 \leqq x \leqq x_2$ nicht existiert, auf der ihm dann etwa der Wert Null gelegt sei[10]). Für jeden Wert von x, für den das innere Integral tiert, ist nun, da $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ höchstens abzählbar viele Unendlichkeitsstellen tzt und φ in y stetig ist,

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = \varphi(x, y_2) - \varphi(x, y_1),$$

überdies ist $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ außer in einer linearen Nullmenge der Integrationscke gleich der Ableitung von φ[11]). Deren Existenzbereich muß meßbar [12]), und da er höchstens eine Nullmenge von Ordinaten und auf jeder gen Ordinate höchstens eine lineare Nullmenge nicht umfaßt, so ist nach dem Fubinischen Satz[13]) ein maßgleicher Kern von R. Somit en wir

$$\iint_R \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx\, dy = \int_{x_1}^{x_2} [\varphi(x, y_2) - \varphi(x, y_1)]\, dx = -\int_C \varphi(x, y)\, dx,$$

letzte Integral im positiven Sinne auf den Rand C um R herum reckt. Für die anderen Ableitungen ergeben sich analoge Formeln, ch die man wieder zu (3) gelangt. Bedenkt man noch, daß in einem ßgleichen Kern von R die Gleichungen (1) gelten, so folgt

$$\int_C f(z)\, dz = 0.$$

rin erfüllt nun $f(z)$ die Bedingungen von Satz I, und somit ist der veis geführt.

Von diesen Sätzen wird vielleicht nur Satz I zur Entscheidung der ge, ob eine vorgelegte Funktion analytisch sei, von einigem Nutzen können, während die beiden andern wegen ihrer Kompliziertheit zu r Anwendung wohl stets einer Spezialisierung bedürfen, die sie den annten Sätzen annähert. Immerhin zeigen unsere Ergebnisse, daß sich Klasse der analytischen Funktionen durch logisch umfassendere Merkle als die üblichen hinreichend charakterisieren läßt.

---

[10]) Fubini s. Anm. [3]); Carathéodory, l. c.[2]) S. 632, Satz 4.
[11]) Carathéodory, l. c.[2]) S. 597, Satz 4 und S. 545, Satz 2.
[12]) Vgl. Anm. [2]).
[13]) l. c. [3]).

(Eingegangen am 27. November 1918.)

Beiträge zur Konvergenztheorie der Stieltjesschen Kettenbrüche.

Von

Hans Hamburger in Berlin.

1. In seiner Arbeit, „Recherches sur les fractions continues“[1]), unter sucht Stieltjes die Kettenbrüche von der Form

$$K(z) = \frac{1}{a_1 z + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 z + \frac{1}{a_4 + \ldots}}}},$$

wobei mit z die komplexe Veränderliche, mit a_ν reelle positive von Nu verschiedene Konstanten bezeichnet sind.

Auf Grund passend erweiterter Sätze von Stern[2]) unterscheide Stieltjes zwei Fälle:

I. $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ ist divergent.

Dann konvergiert der Kettenbruch $K(z)$ in jedem abgeschlossene Bereich der z-Ebene, der kein Stück der Achse der reellen negativen Zahle enthält, gegen eine analytische Funktion $f(z)$.

II. $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ ist konvergent.

---

[1]) T. J. Stieltjes, Annales de la faculté des sc. de Toulouse, Bd. 8 und 9 (18 bis 1895). Im folgenden mit Stieltjes VIII bzw. IX zitiert. Eine kurze zusamme hängende Darstellung der Hauptsätze der Theorie befindet sich in dem Lehrbuch von Herrn Perron, „Die Lehre von den Kettenbrüchen“. Leipzig 1913, S. 362–4 (im folgenden kurz mit Perron, Lehrbuch, zitiert).

[2]) M. A. Stern, „Über die Kennzeichen der Konvergenz eines Kettenbruchs Journal f. Math., Bd. 37 (1848). S. 255–272; — Stieltjes VIII, S. 30–35 u. S. bis 65. Vgl. auch Perron, Lehrbuch, S. 234–235.

Bezeichnen wir mit $\frac{P_m(z)}{Q_m(z)}$ den Näherungsbruch m-ter Ordnung des ttenbruchs $K(z)$, so bestehen im Falle II die Beziehungen

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = f_1(z), \qquad \lim_{n=\infty} \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = f_2(z),$$

l zwar wieder gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Bereich der z-Ebene, kein Stück der Achse der reellen negativen Zahlen enthält. Außerdem l die analytischen Funktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ von einander verschieden.

Wir wollen den Fall I kurz den Fall der Konvergenz, den Fall II den l der Divergenz des Kettenbruchs $K(z)$ nennen.

Die wichtigste Entdeckung von Stieltjes besteht in dem Nachweis, ß im Konvergenzfalle die Funktion $f(z)$, im Divergenzfalle die Funknen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ sich durch bestimmte Stieltjessche Integrale darllen lassen, und zwar wird, wenn $\varphi(u)$ bzw. $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$ im Intervall $\leq u < \infty$ definierte reelle nirgends abnehmende Funktionen bedeuten,

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{d\varphi(u)}{z+u}; \qquad f_1(z) = \int_0^\infty \frac{d\varphi_1(u)}{z+u}, \qquad f_2(z) = \int_0^\infty \frac{d\varphi_2(u)}{z+u}\ ^3).$$

2. Schon vor Stieltjes war bekannt, daß sich dem Kettenbruch $K(z)$ e formale Potenzreihe

$$S(z) = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots,$$

im allgemeinen Falle für jeden noch so großen Wert von z divergiert, deutig zuordnen läßt. Es zeigt sich nämlich auf Grund der Fundantalformeln für Kettenbrüche, daß sich der m-te Näherungsbruch $\frac{P_m(z)}{Q_m(z)}$ eine für hinreichend große Werte von z konvergente Potenzreihe

$$S_m(z) = \frac{c_{m0}}{z} - \frac{c_{m1}}{z^2} + \frac{c_{m2}}{z^3} - \ldots$$

wickeln läßt, und daß die Potenzreihe $S_m(z)$ mit den Potenzreihen $_{+p}(z)$, in die sich die Näherungsbrüche $m+p$-ter Ordnung $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ hinreichend große Werte von z entwickeln lassen, in den m ersten effizienten übereinstimmt[4]). Es wird also

$$c_{m,0} = c_{m+p,0}, \quad c_{m,1} = c_{m+p,1}, \quad \ldots, \quad c_{m,m-1} = c_{m+p,m-1}.$$

stimmt man jetzt eine Potenzreihe der Form (1), indem man für alle m

$$c_0 = c_{m,0}, \quad c_1 = c_{m,1}, \quad \ldots, \quad c_{m-1} = c_{m,m-1}$$

[3]) Ausführliche Darstellung des Stieltjesschen Integralbegriffs, s. Stieltjes VIII, 8—71. Vgl. auch Perron, Lehrbuch, S. 362—374.

Der zitierte Stieltjessche Satz findet sich bei Stieltjes VIII, S. 76—90; rron, Lehrbuch, S. 402—410.

[4]) Stieltjes VIII, S. 18—19; Perron, Lehrbuch, S. 302.

setzt, so erhält man auf diese Weise eine dem Kettenbruch $K(z)$ eindeutig zugeordnete Potenzreihe.

Ist umgekehrt eine Potenzreihe $S(z)$ vorgelegt, so läßt sich dann und nur dann ein Kettenbruch $K(z)$, der zu $S(z)$ in dem eben beschriebenen Zuordnungsverhältnis steht, mit nur positiven von Null verschiedenen Koeffizienten a_ν konstruieren, wenn die aus den Koeffizienten c_ν gebildeten Hankelschen Determinanten

$$(2) \qquad C_n = \begin{vmatrix} c_0, & c_1, & \ldots, & c_n \\ c_1, & c_2, & \ldots, & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n, & c_{n+1}, & \ldots, & c_{2n} \end{vmatrix}$$

und

$$(3) \qquad B_n = \begin{vmatrix} c_1, & c_2, & \ldots, & c_n \\ c_2, & c_3, & \ldots, & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n, & c_{n+1}, & \ldots, & c_{2n-1} \end{vmatrix}$$

für alle n positiv sind. Daraus folgt leicht, daß auch die Koeffizienten c_ν selbst positive Zahlen sein müssen.

Zwischen der Potenzreihe $S(z)$ und den Funktionen $f(z)$ bzw. $f_1(z)$ und $f_2(z)$, gegen die der Kettenbruch $K(z)$ bzw. eine gewisse Teilfolge seiner Näherungsbrüche konvergiert, besteht im Innern des Winkelraumes

$$(4) \qquad -\pi + \delta \leqq \arg z \leqq \pi - \delta$$

die Beziehung

$$f(z) \sim S(z); \qquad f_1(z) \sim S(z), \qquad f_2(z) \sim S(z)^5).$$

Hierbei bedeutet $f(z) \sim S(z)$ in der Poincaréschen Bezeichnungsweise das für jedes feste n im Innern des Winkelraumes (4)

$$\lim_{z=\infty} z^n \left(f(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \frac{c_\nu}{z^{\nu+1}} \right) = 0$$

ist.

Endlich besteht auch zwischen der Belegungsfunktion $\varphi(u)$ bzw. den Belegungsfunktionen $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$ und den Koeffizienten c_ν ein Zusammenhang, der in den Beziehungen

$$(5) \qquad \int_0^\infty u^\nu \, d\varphi(u) = c_\nu; \qquad \int_0^\infty u^\nu \, d\varphi_1(u) = \int_0^\infty u^\nu \, d\varphi_2(u) = c_\nu$$

seinen Ausdruck findet[6]).

---

[5]) Vgl. Stieltjes VIII, S. 35; Perron, Lehrbuch, S. 413.

[6]) Vgl. Stieltjes VIII, S. 92—93; Perron, Lehrbuch, S. 410—411.

3. Ist umgekehrt eine formale Potenzreihe $S(z)$ der Form (1) vorgelegt, ennt Stieltjes die Frage nach einer im Intervall $0 \leqq u < \infty$ definierten den nirgends abnehmenden Funktion $\varphi(u)$, die den Beziehungen (5) ge-t, das der Potenzreihe $S(z)$ zugeordnete Momentenproblem.

Aus den bisher angegebenen Resultaten der Stieltjesschen Theorie t nun schon, daß das Momentenproblem sicher dann lösbar ist, wenn aus den c_ν gebildeten Hankelschen Determinanten B_n und C_n für n positiv sind.

Denn in diesem Falle läßt sich der Potenzreihe $S(z)$ ein Stieltjesscher tenbruch $K(z)$ zuordnen, der die analytische Funktion

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{d\varphi(u)}{z+u},$$

. die Funktionen

$$f_1(z) = \int_0^\infty \frac{d\varphi_1(u)}{z+u}, \qquad f_2(z) = \int_0^\infty \frac{d\varphi_2(u)}{z+u}$$

niert. Dann liefern die Funktionen $\varphi(u)$ bzw. $\varphi_1(u)$ und $\varphi_2(u)$ Lösungen Momentenproblems.

Es ist andererseits weiter leicht einzusehen, daß, falls das der Potenz-e $S(z)$ zugeordnete Momentenproblem eine Lösung besitzt, die Deter-anten C_n und B_n sämtlich größer als Null sind. Denn sind $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ebige reelle Veränderliche, und setzt man

$$F_n(x) = \int_0^\infty (x_0 + ux_1 + \ldots + u^n x_n)^2 \, d\varphi(u) = \sum_{\iota,\varkappa=0}^{n} c_{\iota+\varkappa} x_\iota x_\varkappa,$$

$$F_n^{(1)}(x) = \int_0^\infty u(x_0 + ux_1 + \ldots + u^{n-1} x_{n-1})^2 \, d\varphi(u) = \sum_{\iota,\varkappa=0}^{n-1} c_{\iota+\varkappa+1} x_\iota x_\varkappa,$$

ind offenbar die quadratischen Formen $F_n(x)$ und $F_n^{(1)}(x)$ beide für Werte des Index n positiv definit, also ihre Determinanten C_n und B_n le größer als Null. Die Bedingungen $C_n > 0$, $B_n > 0$ sind also not-dig und hinreichend dafür, daß das der Potenzreihe $S(z)$ zugeordnete nentenproblem eine Lösung besitzt.

4. Jetzt erhebt sich eine weitere Frage. Wann ist das Momenten-blem bestimmt, d. h. wann läßt sich zu einer vorgegebenen Potenz-e $S(z)$ der Form (1), deren Koeffizientendeterminanten C_n und B_n tlich größer als Null sind, eine und nur eine reelle, nirgends abnehmende ktion $\varphi(u)$ finden, durch die die Größen c_ν vermittelst der Integrale (5) gestellt werden. Hierbei werden zwei monotone Lösungen $\varphi(u)$ und) dann noch als einander gleich angesehen, wenn sie mindestens in n Stetigkeitspunkten übereinstimmen. oder sich nur um eine Kon-te unterscheiden.

Stieltjes beantwortet auch diese Frage, indem er den Satz beweist, daß das einer Potenzreihe $S(z)$ zugehörige Momentenproblem dann und nur dann bestimmt ist, wenn der zugeordnete Stieltjessche Kettenbruch $K(z)$ in jedem abgeschlossenen Bereich der z-Ebene, der kein Stück der Achse der negativen Zahlen enthält, konvergiert[7]). Im Falle der Divergenz des zugeordneten Kettenbruches $K(z)$ war übrigens schon oben bemerkt worden, daß das zu $S(z)$ gehörige Momentenproblem mindestens zwei Lösungen, nämlich die mit $\varphi_1(u)$ und $\varphi_2(u)$ bezeichneten Funktionen, besitzt.

5. Wir wollen uns in der vorliegenden Arbeit mit der Frage der Konvergenz des Stieltjesschen Kettenbruches $K(z)$ beschäftigen. Ist der Kettenbruch $K(z)$ in expliziter Form vorgelegt, d. h. sind die positiven Koeffizienten a_ν gegeben, so ist das Problem bereits durch die oben angegebenen Sätze von Stern und Stieltjes erledigt. Sind aber nur die Potenzreihenkoeffizienten c_ν bekannt, die den Bedingungen $C_n > 0$, $B_n > 0$ genügen mögen, so wird es oft mit Schwierigkeiten verknüpft oder gar unmöglich sein, die Koeffizienten a_ν so darzustellen, daß sich die Divergenz oder Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ erkennen läßt. Es dürfte also ein Satz von Interesse sein, der uns gestattet, aus den Koeffizienten c_ν unmittelbar die Konvergenz des zugeordneten Stieltjesschen Kettenbruches zu erschließen.

Geht man aber von den Koeffizienten c_ν aus, so scheint es nur natürlich, sich erst die Frage zu stellen, ob das der vorgelegten Koeffizientenfolge zugehörige Momentenproblem bestimmt ist, und aus der Antwort auf diese Frage Schlüsse auf die Konvergenz oder Divergenz des zugeordneten Kettenbruchs zu ziehen.

Das Hauptresultat unserer Arbeit läßt sich in einem Satze dieser Art zusammenfassen:

Ist eine Potenzreihe $S(z)$ vorgelegt, deren Koeffizienten c_ν die Bedingungen $B_n > 0$, $C_n > 0$ erfüllen, und läßt sich eine positive feste Zahl ϱ von der Beschaffenheit bestimmen, daß alle Koeffizienten c_ν der Abschätzung

$$c_\nu \leqq \varrho^\nu (2\nu)! \tag{6}$$

genügen, so ist das der Potenzreihe $S(z)$ zugeordnete Momentenproblem bestimmt und der zugeordnete Stieltjessche Kettenbruch $K(z)$ in jedem abgeschlossenen Bereich der z-Ebene, der kein Stück der Achse der negativen reellen Zahlen enthält, gleichmäßig konvergent.

Dieser Satz wird in § 4 bewiesen werden.

---

[7]) Stieltjes VIII, S. 97—104; Perron, Lehrbuch, S. 390—391 und S. 417.

Eine in gewissem Sinne verwandte Fragestellung findet sich in der eratur zum erstenmal in einer Arbeit von A. Markoff[8]).

Wesentlich mehr als dieser hat Herr Perron bewiesen, dem man Satz verdankt: Der Stieltjessche Kettenbruch ist konvergent, wenn Beziehung

$$c_\nu \leqq \varrho^\nu \nu!$$

unendlich viele ν (also nicht notwendig für alle ν) erfüllt ist[9]).

Die in unserer Arbeit angewandten Methoden stehen mit den Markoff-rronschen Gedankengängen in keinem Zusammenhang.

Die Erweiterung der Voraussetzungen, die die Bedingung (6) gegen-er der Bedingung (7) liefert, ist um so wichtiger, als die Abschätzung das stärkste Anwachsen der Koeffizienten c_ν überhaupt angibt, das ässig ist, wenn man in allen Fällen der Konvergenz des zugeordneten ieltjesschen Kettenbruches sicher sein will. Denn weiß man von einer lge von Koeffizienten c_ν, die den Bedingungen $C_n > 0$, $B_n > 0$ genügen, r, daß für genügend große ν die Beziehung

$$c_\nu \leqq \Gamma((2+\delta)\nu)^{10})$$

jedes feste noch so kleine positive δ gilt, so kann das zugehörige mentenproblem auch mehrere Lösungen haben.

Es gelingt nämlich in § 4, eine Folge von Koeffizienten c_ν anzu-ben, die außer den Bedingungen $C_n > 0$, $B_n > 0$ der Abschätzung (8) *jedes* noch so kleine positive δ genügen und so beschaffen sind, daß s zugehörige Momentenproblem mehr als eine Lösung besitzt[11]).

6. Der Satz über die Bestimmtheit des Momentenproblems des § 4 rd auf ein Hauptlemma zurückgeführt, das wir im § 2 formuliert und wiesen haben, nachdem im § 1 einige elementare Hilfssätze voraus-schickt wurden. Der sehr einfache funktionstheoretische Beweis des auptlemmas enthält den wesentlichen mathematischen Gedanken unserer beit.

---

[8]) A. Markoff, „Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions ntinues", Acta Math. Bd. 19 (1895), S. 93—104. Vgl. auch O. Perron, Lehrbuch, 385—389.

[9]) O. Perron, „Erweiterung eines Markoffschen Satzes über die Konvergenz wisser Kettenbrüche", Math. Ann. Bd. 74 (1913), S. 545—554.

[10]) Unter $\Gamma(x)$ ist in dieser Arbeit immer die Eulersche Γ-Funktion zu verstehen.

[11]) Der Umstand, daß Folgen von Koeffizienten c_ν existieren, die mit ν für ein *timmtes festes* δ unendlich groß werden wie $\Gamma((2+\delta)\nu)$ und so beschaffen sind, ß das zugehörige Momentenproblem unbestimmt ist, war schon Stieltjes bekannt, ch hat er seine Beispiele nur für den Fall $\delta = 2$ näher angegeben. Siehe Stieltjes II, S. 119, vgl. auch das Lemma II des § 2 und die Anm. [17]) auf S. 199 unserer Arbeit.

Im § 3 wird aus dem Hauptlemma die Vollständigkeit gewisser Systeme von Orthogonalfunktionen gefolgert, die im Intervall $0 \leqq x < \infty$ definiert sind. Der in diesem Paragraphen bewiesene Satz lautet:

Es sei ein System von Funktionen der Form

$$\varphi_0(x) = c_{00}\, e^{-\gamma x},$$
$$\varphi_1(x) = (c_{10} + c_{11}\, x^{\beta})\, e^{-\gamma x}.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_\nu(x) = (c_{\nu 0} + c_{\nu 1}\, x^{\beta} + \ldots + c_{\nu\nu}\, x^{\nu\beta})\, e^{-\gamma x},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

vorgelegt; hierbei bezeichnen β und γ zwei willkürliche positive Konstanten. Die $c_{\nu\mu}$ sind reelle Größen, die von β und γ abhängen und so bestimmt sein mögen, daß die Orthogonalitäts- und Normierungsbedingungen

$$\int_0^\infty \varphi_\nu(x)\,\varphi_\mu(x)\,dx = 0, \qquad (\nu \neq \mu)$$

$$\int_0^\infty \varphi_\nu^2(x)\,dx = 1$$

erfüllt sind.

Das System von Orthogonalfunktionen $\varphi_\nu(x)$ genügt dann und nur dann der Vollständigkeitsrelation, wenn $\beta \leqq 2$ ist.

(Für $\beta = 1$, $\gamma = \frac{1}{2}$ erhält man das aus den Laguerreschen Polynomen gewonnene normierte Orthogonalsystem. Ausführliche Literaturangaben über diese Fragen vgl. § 3.) Die Kenntnis des § 3 ist für das Verständnis des folgenden nicht erforderlich.

In § 4 wird der Hauptsatz unserer Arbeit bewiesen.

In § 5 stellen wir einen ähnlichen Satz für eine naheliegende Verallgemeinerung des Momentenproblems auf, die auf eine bekannte Arbeit des Herrn Grommer[12]) zurückgeht. Um die Einleitung dieser Arbeit nicht übermäßig anwachsen zu lassen, haben wir das Problem, das wir uns dort gestellt haben, erst am Eingang des § 5 entwickelt.

§ 1. Hilfsbetrachtungen.

Um den Gedankengang später nicht zu unterbrechen, schicken wir in diesem Paragraphen einige sehr elementare Hilfssätze voraus. Die beiden ersten behandeln die gliedweise Integration von Reihen. Der dritte Hilfssatz ist anderer Natur; er macht eine Aussage über monotone Funktionen, die in einem Intervall bis auf eine Punktmenge vom Maße Null definiert

[12]) Jacob Grommer, „Ganze transzendente Funktionen mit lauter reellen Nullstellen". Inaugural-Dissertation, Göttingen 1914. Abgedruckt im Journal f. Math. Bd. 144 (1914), S. 114–166.

d. Obgleich die Hilfssätze wohl nicht neu sind, geben wir der Voll-ndigkeit halber die Beweise an.

1. Hilfssatz. Es seien $f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ und damit auch $\tilde{f}(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|x^\nu$ ze transzendente Funktionen von x. Es sei ferner $\varphi(x)$ eine im Inter- $0\leqq x<\infty$ definierte reelle Funktion von x von der Beschaffenheit, das Integral

$$\int_0^\infty |\varphi(x)|\tilde{f}(x)\,dx$$

vergent ist.

Dann wird

$$\int_0^\infty \varphi(x)f(x)\,dx=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \int_0^\infty \varphi(x)x^\nu\,dx.$$

Beweis. Man erkennt unmittelbar, daß das Integral

$$\int_0^\infty x^\nu|\varphi(x)|\,dx$$

jedes nicht negative ν absolut konvergiert; denn es ist

$$|a_\nu|\int_0^\infty x^\nu|\varphi(x)|\,dx\leqq\int_0^\infty \tilde{f}(x)|\varphi(x)|\,dx.$$

Wir beweisen jetzt zunächst die Beziehung

$$\int_0^\infty \tilde{f}(x)|\varphi(x)|\,dx=\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|\int_0^\infty x^\nu|\varphi(x)|\,dx.$$

Es ist

$$\sum_{\nu=0}^{n}|a_\nu|\int_0^\infty x^\nu|\varphi(x)|\,dx\leqq\int_0^\infty \tilde{f}(x)|\varphi(x)|\,dx.$$

die Partialsumme links mit wachsendem n monoton zunimmt und, wie Abschätzung (3) erkennen läßt, unter einer festen von n unabhängigen ranke liegt, so ist die unendliche Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|\int_0^\infty x^\nu|\varphi(x)|\,dx\leqq\int_0^\infty \tilde{f}(x)|\varphi(x)|\,dx$$

er konvergent.

Andererseits ist aber, da auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz Potenzreihe für $|x|\leqq R$ im Intervall $0\leqq x\leqq R$ die gliedweise Inte-ion der Reihe gestattet ist,

$$\int_0^R \tilde{f}(x)|\varphi(x)|\,dx=\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|\int_0^R x^\nu|\varphi(x)|\,dx\leqq\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|\int_0^\infty x^\nu|\varphi(x)|\,dx.$$

Da diese Beziehung für jedes noch so große R gilt, so ist auch

$$\int_0^\infty \tilde{f}(x)\,|\varphi(x)|\,dx \leqq \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| \int_0^\infty x^\nu\,|\varphi(x)|\,dx. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) erkennt man aber, daß, wie oben behauptet,

$$\int_0^\infty \tilde{f}(x)\,|\varphi(x)|\,dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| \int_0^\infty x^\nu\,|\varphi(x)|\,dx \tag{6}$$

ist.

Aus der Konvergenz der Summe rechter Hand von (6) folgt unmittelbar die absolute Konvergenz von

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \int_0^\infty x^\nu\,\varphi(x)\,dx,$$

denn es ist

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu \int_0^\infty x^\nu\,\varphi(x)\,dx| \leqq \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| \int_0^\infty x^\nu\,|\varphi(x)|\,dx.$$

Bezeichnet man mit $S_n(x)$ die Partialsumme $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$, so ist

$$\int_0^\infty S_n(x)\,\varphi(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \int_0^\infty x^\nu\,\varphi(x)\,dx,$$

folglich ist

$$\lim_{n=\infty} \int_0^\infty S_n(x)\,\varphi(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \int_0^\infty x^\nu\,\varphi(x)\,dx. \tag{7}$$

Dieser Grenzwert existiert, da die Reihe rechter Hand konvergiert.

Unsere Behauptung (2) ist bewiesen, wenn es gelingt, zu zeigen, daß auch

$$\int_0^\infty f(x)\,\varphi(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_0^\infty S_n(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

oder, anders geschrieben,

$$\lim_{n=\infty} \int_0^\infty [f(x) - S_n(x)]\,\varphi(x)\,dx = 0 \tag{8}$$

ist.

Um dies einzusehen, bestimme man eine Zahl R von der Beschaffenheit, daß, unter ε eine vorgegebene beliebig kleine positive Zahl verstanden,

$$\int_R^\infty f(x)\,|\varphi(x)|\,dx \leqq \frac{\varepsilon}{4}$$

wird, was auf Grund der vorausgesetzten Konvergenz von (1) immer möglich ist.

Dann ist für jedes n wegen $|S_n(x)| \leqq \tilde{f}(x)$

$$\left|\int_R^\infty [f(x) - S_n(x)]\,\varphi(x)\,dx\right| \leqq 2\int_R^\infty \tilde{f}(x)\,|\varphi(x)|\,dx \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Man setze ferner

$$\int_0^\infty |\varphi(x)|\,dx = A$$

bestimme nunmehr eine Zahl N von der Beschaffenheit, daß für alle N im Intervall $0 \leqq x \leqq R$

$$|f(x) - S_n(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{2A}$$

. Dies ist wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Potenzreihe in n endlichen Gebiet immer möglich.

Dann wird für alle $n \geqq N$

$$\left|\int_0^R [f(x) - S_n(x)]\,\varphi(x)\,dx\right| \leqq \int_0^R |f(x) - S_n(x)|\,|\varphi(x)|\,dx$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{2A}\int_0^R |\varphi(x)|\,dx \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aus (9) und (10) folgt die Beziehung (8) und damit ist unser Hilfs- bewiesen.

2. Hilfssatz. Es habe $f(x)$, $\tilde{f}(x)$ und $\varphi(x)$ dieselbe Bedeutung im 1. Hilfssatz. Es sei nunmehr die Reihe

$$\sum_{r=0}^\infty |a_r| \int_0^\infty |\varphi(x)|\,x^r\,dx$$

ergent. Dann konvergiert auch das Integral

$$\int_0^\infty \tilde{f}(x)\,|\varphi(x)|\,dx,$$

es ist außerdem

$$\int_0^\infty f(x)\,\varphi(x)\,dx = \sum_{r=0}^\infty a_r \int_0^\infty \varphi(x)\,x^r\,dx.$$

Beweis. Es ist nur zu zeigen, daß das Integral (12) konvergent denn dann sind die Voraussetzungen des 1. Hilfssatzes erfüllt, dessen uptung (2) mit der Behauptung (13) des 2. Hilfssatzes identisch ist. Nun ist aber für jedes noch so große R

$$\int \tilde{f}(x)\,|\varphi(x)|\,dx = \sum_{r=0}^\infty |a_r| \int_0^R |\varphi(x)|\,x^r\,dx \leqq \sum_{r=0}^\infty |a_r| \int_0^\infty |\varphi(x)|\,x^r\,dx,$$

und hieraus folgt, da die Reihe (11) konvergent vorausgesetzt wurde, daß das Integral

$$\int_0^R \tilde{f}(x)\ \varphi(x)\,|\,dx$$

unterhalb einer festen von R unabhängigen Schranke gelegen ist. Da aber dieses Integral außerdem noch mit wachsendem R niemals abnimmt, so ist es sicher konvergent. W. z. b. w.

3. Hilfssatz. Es seien $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ zwei im Intervall $0 \leqq u < \infty$ definierte reelle nirgends abnehmende Funktionen, die in allen Punkten des Intervalls mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null übereinstimmen.

Ist dann die Funktion $\varphi(u)$ im Punkte $u = a$ stetig, so ist

$$\varphi(a) = \psi(a).$$

Beweis. Ist $u = a$ ein beliebiger Punkt des Intervalls, in dem die Funktionen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ definiert sind, so müssen, da nach Voraussetzung diese Funktionen beide monoton sind, die Grenzwerte

$$\lim_{h=0} \psi(a+h) \quad \text{und} \quad \lim_{h=0} \psi(a-h)$$

und entsprechend für die Funktion $\varphi(u)$ existieren.

Ist außerdem die Funktion $\varphi(u)$ im Punkte $u = a$ stetig, so muß

$$\lim_{h=0} \psi(a+h) = \varphi(a) = \lim_{h=0} \psi(a-h) \tag{14}$$

sein, da andernfalls die Funktionen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ im Widerspruch mit den gemachten Voraussetzungen längs eines Intervalles von endlicher Länge, also in einer Punktmenge vom Maße größer als Null, voneinander verschieden wären.

Aus (14) folgt aber die Stetigkeit auch der Funktion $\psi(u)$ im Punkte $u = a$ und ferner die behauptete Beziehung

$$\psi(a) = \varphi(a)$$ W. z. b. w.

§ 2. Hauptlemma.

Lemma I[13]). *Es sei $\chi(u)$ eine reelle Funktion der reellen veränderlichen u, die im Intervall $0 \leqq u < \infty$ definiert sein möge. Es existier*

[13]) Einen ähnlichen Satz gibt Herr E. Borel an in seinem Buche: „Leçons sur les séries divergentes", Paris 1901, S. 71–75. Doch ist dort unsere Voraussetzung (1 durch die speziellere

$$|\chi(u)| \leqq \text{const}\, e^{\delta' \sqrt{u}}$$

ersetzt. — Aus dieser engeren Fassung unseres Lemmas ließen sich indessen die Sätze der §§ 3 und 4 nicht herleiten, so daß also die hier angegebene Verallgemeinerung der Voraussetzungen wesentlich ist. Außerdem stützt sich der Beweis des Herrn

er eine positive Konstante $\delta > 0$ von der Beschaffenheit, daß das gral

$$\int_0^\infty |\chi(u)|\, e^{-\delta\sqrt{u}}\, du = 2\int_0^\infty u\,|\chi(u^2)|\, e^{-\delta u}\, du$$

ergiert.

Bedeutet γ eine positive Zahl größer als δ, und ist für alle nicht tiven ganzzahligen ν

$$\int_0^\infty u^\nu \chi(u)\, e^{-\gamma\sqrt{u}}\, du = 2\int_0^\infty u^{2\nu+1}\chi(u^2)\, e^{-\gamma u}\, du = 0,$$

erschwindet $\chi(u)$ identisch bis auf eine Menge vom Maße Null[14]).

Beweis. Man betrachte das vom komplexen Parameter z abhängige gral

$$F(z) = \int_0^\infty \chi(u)\, e^{(z-\gamma)\sqrt{u}}\, du = 2\int_0^\infty u\chi(u^2)\, e^{(z-\gamma)u}\, du.$$

Aus der Voraussetzung (15) folgt, daß das Integral (17) für $z = \gamma - \delta$ lut konvergent ist. Dann ist aber nach einem bekannten Satze[15]) Integral jedenfalls in der ganzen Halbebene $\Re(z) \leqq \gamma - \delta$ absolut gleichmäßig konvergent und stellt in dieser Halbebene eine analytische ktion von z dar.

Wir wenden jetzt unsern Hilfssatz 1 auf das Integral (17) an, indem die Funktion $\varphi(u)$ des Hilfssatzes gleich $u\chi(u^2)\, e^{-\gamma u}$ und die dort $f(u)$ bezeichnete Funktion gleich $e^{zu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu u^\nu}{\nu!}$ setzen. Nach diesem ssatz ist die gliedweise Integration der Reihe für e^{zu} für $|z| \leqq \gamma - \delta$ attet. Wir erhalten also die für $|z| \leqq \gamma - \delta$ sicher konvergente nzreihe

---

el auf einen Satz von Stieltjes, der noch weitere tiefliegende Untersuchungen der Theorie des Momentenproblems heranzieht und benutzt ferner noch spezielle komplizierte Kettenbruchentwicklungen, die Stieltjes in einer Arbeit „Sur ques intégrales définies et leur développement en fractions continues" in den erly Journal of pure and applied Math. Bd. 24 (1890), S. 370–382 veröffentlicht — Unser Beweis des Lemmas macht hingegen von den Hilfsmitteln aus der rie der Kettenbrüche oder der Stieltjesschen Integraldarstellungen keinen auch.

[14]) Unter den Integralen seien in diesem und im folgenden Paragraphen im lick auf die Theorie der Orthogonalfunktionen Lebesguesche Integrale verstanden.

[15]) Vgl. z. B. E. Landau, „Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen", Sitzungsberichte d. Math.-Phys. Klasse d. Kgl. Bayr. Ak. d. Wissensch. Bd. 36 (1906), S. 151–218, insbesondere S. 208 ff. Mit der Abkürzung $\Re(z)$ ist der reelle Teil von z bezeichnet.

$$(18) \qquad F(z) = 2\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!} \int_0^\infty u^{\nu+1} \chi(u^2) e^{-\gamma u}\, du.$$

Aus (16) folgt nun, daß die Koeffizienten der geraden Potenzen von z verschwinden. $F(z)$ ist also eine ungerade Funktion.

Da aber das Integral (17) in der Halbebene $\Re(z) \leqq \gamma - \delta$ absolut konvergiert, so ist die Funktion $F(z)$ in der unendlichen Halbebene $\Re(z) \leqq \gamma - \delta$ beschränkt. Da außerdem $F(z)$ eine ungerade Funktion ist und die Halbebene, in der wir die Beschränktheit der Funktion nachgewiesen haben, die Achse der imaginären Zahlen ganz im Innern enthält, so können wir aus der Beziehung

$$F(-z) = -F(z)$$

schliessen, daß $F(z)$ in der ganzen Ebene des komplexen Veränderlichen beschränkt ist.

Dann ist aber $F(z)$ nach einem Liouvilleschen Fundamentalsatz der Funktionentheorie gleich einer Konstanten. Da außerdem $F(z)$ als ungerade Funktion für $z = 0$ verschwindet, so muß $F(z)$ identisch verschwinden. Nach einem Satze des Herrn Lerch[16]) muß dann aber auch $u\chi(u^2)e^{-\gamma u}$ bis auf eine Menge vom Maße Null identisch verschwinden und damit ist unser Satz bewiesen.

Zusatz zu Lemma I. *Es sei $\chi(u)$ eine reelle im Intervall $0 \leqq u < \infty$ definierte Funktion und δ eine Zahl von der Beschaffenheit daß das Integral* (15) *konvergiert. Bedeutet α eine positive Zahl $> \frac{1}{2}$, γ eine beliebige positive Zahl und sind für alle nicht negativen ganzzahligen ν die Integrale*

$$(19) \qquad \int_0^\infty u^\nu \chi(u) e^{-\gamma u^\alpha}\, du = 2\int_0^\infty u^{2\nu+1} \chi(u^2) e^{-\gamma u^{2\alpha}}\, du = 0,$$

so verschwindet $\chi(u)$ identisch bis auf eine Menge vom Maße Null.

Beweis: An Stelle des Integrals (17) betrachte man das Integral

$$F(z) = \int_0^\infty \chi(u) e^{z\sqrt{u} - \gamma u^\alpha}\, du = 2\int_0^\infty u\chi(u^2) e^{zu - \gamma u^{2\alpha}}\, du,$$

---

[16]) M. Lerch, „Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel", Acta Math. Bd. 27 (1903), S. 339–352. Der Satz des Herrn Lerch auf Lebesguesche Integrale übertragen lautet: Verschwindet

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zu} \varphi(u)\, du$$

für die Punkte $c + \nu\varrho$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) einer arithmetischen Progression, so verschwindet $\varphi(u)$ identisch bis auf eine Menge vom Maße Null.

wie man unschwer erkennt, in jeder Halbebene $\Re(z) \leqq A$, wo A beliebig große positive Konstante bedeutet, absolut und gleichmäßig ergiert.

Indem man $F(z)$ in eine Potenzreihe entsprechend (18) entwickelt, nnt man auf Grund von (19), daß $F(z)$ eine ungerade Funktion ist. schließt nunmehr wie beim Beweise des Lemmas I, daß $F(z)$ in ganzen komplexen Zahlenebene eine reguläre analytische beschränkte ktion von z, also gleich einer Konstanten ist.

Weiter findet man, daß $F(z)$ identisch verschwindet und damit auch, $\chi(u) = 0$ ist bis auf eine Menge vom Maße Null. W. z. b. w.

Lemma II. *Es sei α eine positive reelle Zahl $< \frac{1}{2}$, γ eine beliebe positive reelle Zahl. Dann verschwinden die Integrale*

$$I_\nu = \int_0^\infty u^\nu \sin\left[(\operatorname{tg} \pi\alpha)\, \gamma u^\alpha\right] e^{-\gamma u^\alpha} du \text{ [17]}$$

alle nicht negativen ganzzahligen Werte von ν.

Beweis. Es ist

$$I_\nu = \int_0^\infty u^\nu \Im\left(e^{i(\operatorname{tg}\pi\alpha)\gamma u^\alpha}\right) e^{-\gamma u^\alpha} du = \Im\left(\int_0^\infty u^\nu e^{-(1-i\operatorname{tg}\pi\alpha)\gamma u^\alpha} du\right) \text{ [18]}.$$

setzen

$$\varrho = |1 - i \operatorname{tg} \pi\alpha|,$$

ı wird, wie man leicht erkennt, da $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ist,

$$1 - i \operatorname{tg} \pi\alpha = \varrho e^{-i\pi\alpha},$$

$$I_\nu = \Im\left(\int_0^\infty u^\nu e^{-\gamma\varrho e^{\alpha(\log u - i\pi)}} du\right).$$

bei ist unter $\log u$ der reelle Wert des Logarithmus zu verstehen.

Die Beziehung (22) gilt nicht mehr für $\alpha \geqq \frac{1}{2}$.

[17]) In der Arbeit von Stieltjes VIII S. 105 sind die Integrale I_ν nur für den chsten Fall $\alpha = \frac{1}{4}$ angegeben, wo $\operatorname{tg}\pi\alpha = 1$ wird. Es wird dort ihr Verschwinden Angabe des Beweises behauptet.

Vgl. auch unser Beispiel im § 4 S. 209. Dort wird eine Funktion $\Phi(u)$ ange-n, deren Momente $\int_0^\infty u^\nu \Phi(u)\, du$ sämtlich gleich Null werden und deren absoluter ag mit wachsendem u gegen Null wie die Funktion $e^{-\frac{\pi\sqrt{u}}{\log^2 u}}$ abnimmt. Dies ist Rücksicht auf das Lemma I die stärkste Abnahme gegen Null bei wachsendem u, vir von $\Phi(u)$ erwarten dürfen, wenn alle Momente der Funktion verschwinden ı.

[18]) Die Abkürzung $\Im(f(x))$ bezeichnet den imaginären Teil von $f(x)$. Ist also $= \varphi + i\psi$, so ist

$$\Im(f(x)) = \psi.$$

Substituiert man nun[19])

$$v = (1 - i \operatorname{tg} \pi\alpha)\, \gamma u^{\alpha} = \varrho^{\gamma} (u e^{-i\pi})^{\alpha},$$

$$u = -\left(\frac{v}{\varrho^{\gamma}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad du = -\frac{1}{\alpha \varrho^{\gamma}} \left(\frac{v}{\varrho^{\gamma}}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} dv$$

in das Integral (21) für I_r, so erhält man

$$I_r = \Im\left(\frac{(-1)^{r+1}}{\alpha \varrho^{\gamma}} \int_{\mathfrak{g}} \left(\frac{v}{\varrho^{\gamma}}\right)^{\frac{r+1}{\alpha}-1} e^{-v} dv\right).$$

Der Integrationsweg $\mathfrak{g}$ ist ein Strahl durch den Nullpunkt, der mit d Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel gleich $-\pi\alpha$ bildet.

Setzt man

$$v = r e^{i\vartheta},$$

so wird die zu integrierende Funktion gleich

$$\left(\frac{r e^{i\vartheta}}{\varrho^{\gamma}}\right)^{\frac{r+1}{\alpha}-1} e^{-r(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)}.$$

Da nun diese Funktion, wenn r über alle Grenzen wächst, fü $0 \geqq \vartheta \geqq -\pi\alpha > -\frac{\pi}{2}$ von höherer Ordnung als $\frac{1}{r}$ gleichmäßig in ϑ ver schwindet, so ist nach dem Cauchyschen Integralsatze das Integral läng des Strahles $\mathfrak{g}$ gleich dem Integral längs der Achse der reellen Zahle und man erkennt daraus, da die zu integrierende Funktion dort wege $\vartheta = 0$ reell ist, daß das Integral einen reellen Wert hat, das heißt abe daß sein imaginärer Teil I_r verschwindet. W. z. b. w.

§ 3.

Beweis der Vollständigkeit einiger Systeme von Orthogonalfunktionen

Es seien β und γ zwei feste positive Zahlen. Man bestimme jetz Konstanten $c_{r\mu}$ ($r = 0, 1, 2, \ldots$, $\mu = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $\mu \leqq r$) von der Be schaffenheit, daß die Funktionen

$$(23) \qquad \begin{cases} \varphi_0(x) = c_{00}\, e^{-\gamma x}, \\ \varphi_1(x) = (c_{10} + c_{11}\, x^{\beta})\, e^{-\gamma x}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_r(x) = (c_{r0} + c_{r1}\, x^{\beta} + \ldots + c_{rr}\, x^{r\beta})\, e^{-\gamma x}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

[19]) Man kann diese Substitution hier vermeiden und, wie dies bei dem Beispi des § 4 S. 210 gezeigt wird, schon hier den Cauchyschen Integralsatz anwenden; i dessen scheint uns, daß sich durch die Substitution die Rechnung etwas übersich licher gestaltet.

ntervall $0 \leqq x < \infty$ ein System von normierten Orthogonalfunktionen en, daß also

$$\begin{cases} \int_0^\infty \varphi_\nu(x)\,\varphi_\mu(x)\,dx = 0, & (\nu \neq \mu) \\ \int_0^\infty \varphi_\nu^2(x)\,dx = 1 \end{cases}$$

l.

Durch diese Forderung sind die Koeffizienten $c_{\nu\mu}$ bis auf das Vorhen eindeutig bestimmt. Die hier noch bestehende Willkür wird dach beseitigt, daß man den Koeffizienten $c_{\nu\nu}$ ein positives Vorzeichen schreibt. Da nämlich die Funktionen $x^\nu e^{-\gamma x}$ voneinander linear unängig sind, so nehmen die $c_{\nu\nu}$ sämtlich von Null verschiedene Werte Ist $\beta = 1$ und $\gamma = \frac{1}{2}$, so erhält man das aus den Laguerreschen ynomen gewonnene System von Orthogonalfunktionen.

Man nennt nun ein System von Orthogonalfunktionen $\varphi_\nu(x)$ im ervall $0 \ldots \infty$ *nicht abgeschlossen*, wenn sich eine Funktion $\varphi(x)$ von Beschaffenheit bestimmen läßt, daß erstens das Integral

$$\int_0^\infty \varphi^2(x)\,dx$$

tiert und von Null verschieden ist, zweitens die Integrale

$$\int_0^\infty \varphi(x)\,\varphi_\nu(x)\,dx,$$

en Konvergenz sich in der üblichen Weise mit Hilfe der Schwarzen Ungleichheitsbeziehung aus der Konvergenz der Integrale (24) und) ergibt, sämtlich verschwinden.

Existiert keine solche Funktion $\varphi(x)$, so sagt man, das Orthogonalem (23) ist *abgeschlossen*.

Wir behaupten nunmehr: *für $\beta \leqq 2$ ist das System (23) von Orthoalfunktionen abgeschlossen, und für $\beta > 2$ ist es nicht abgeschlossen.* Beweis dieser Behauptung ist auf Grund der Sätze des vorigen Paraphen unschwer zu erbringen.

Da die Konstanten $c_{\nu\nu}$ in (23) von Null verschieden sind, läßt sich eine e Matrix von Koeffizienten $\gamma_{00}, \gamma_{10}, \gamma_{11}, \ldots$ in der Weise bestimmen, daß

$$x^{\mu\beta} e^{-\gamma x} = \sum_{\nu=0}^{\mu\mu} \gamma_{\mu\nu} \varphi_\nu(x)$$

d.

Wir machen die Annahme, es existiere für den Fall $\beta \leqq 2$ eine zu tlichen Funktionen $\varphi_\nu(x)$ orthogonale Funktion $\varphi(x)$ von der Beaffenheit, daß das mit ihr gebildete Integral (25) gegen einen von Null

verschiedenen Wert konvergiert. Wegen (26) wäre dann $\varphi(x)$ auch zu den Funktionen $x^{\mu\beta} e^{-\gamma x}$ orthogonal, man hätte also

$$\int_0^\infty x^{\mu\beta} e^{-\gamma x} \varphi(x)\, dx = 0 \tag{27}$$

für alle μ.

Setzt man jetzt $\beta = \frac{1}{\alpha}$ und transformiert man das Integral (27) vermittels der Substitution

$$x = u^\alpha, \qquad u = x^\beta, \qquad \varphi(x) = \varphi(u^\alpha) = \chi(u),$$

so erhält man

$$\alpha \int_0^\infty u^{\alpha-1} \chi(u) u^\mu e^{-\gamma u^\alpha} du = 0 \quad \text{für alle } \mu \geqq 0.$$

Aus der Voraussetzung $\beta \leqq 2$ folgt $\alpha \geqq \frac{1}{2}$.

Es war ferner nach unserer Annahme das Integral

$$\int_0^\infty \varphi^2(x)\, dx = \alpha \int_0^\infty u^{\alpha-1} \chi^2(u)\, du$$

konvergent; dann konvergiert aber auch das Integral

$$\int_0^\infty |\chi(u)|\, u^{\alpha-1} e^{-\delta\sqrt{u}}\, du$$

für jedes noch so kleine positive von Null verschiedene δ. Denn die Schwarzsche Ungleichheitsbeziehung ergibt

$$\int_0^\infty |\chi(u)|\, u^{\alpha-1} e^{-\delta\sqrt{u}}\, du \leqq \sqrt{\int_0^\infty \chi^2(u)\, u^{\alpha-1}\, du \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-2\delta\sqrt{u}}\, du}.$$

Da man nun aber immer $\delta < \gamma$ wählen kann, so genügt die Funktion $u^{\alpha-1}\chi(u)$ allen Voraussetzungen des Lemmas I des § 2 bzw. seines Zusatzes, muß also bis auf eine Menge vom Maße Null verschwinden. Das System (23) von Orthogonalfunktion $\varphi_\nu(x)$ ist also für $\beta \leqq 2$ ein abgeschlossenes System.

Ist andererseits $\beta > 2$, $\alpha < \frac{1}{2}$, so setzen wir

$$\begin{cases} \chi(u) = u^{1-\alpha} \sin\left[(\operatorname{tg} \pi\alpha)\, 2\gamma u^\alpha\right] e^{-\gamma u^\alpha}, \\ \varphi(x) = x^{\beta-1} \sin\left[\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{\beta}\right) 2\gamma x\right] e^{-\gamma x}. \end{cases} \tag{28}$$

Man erkennt unmittelbar, daß für die Funktion (28) das Integral (25) konvergent und von Null verschieden ist, ferner, daß auf Grund des Lemmas II des § 2 die Integrale

$$\int_0^\infty x^{\mu\beta} \varphi(x)\, e^{-\gamma x}\, dx = \alpha \int_0^\infty u^\mu u^{\alpha-1} \chi(u)\, e^{-\gamma u^\alpha}\, du$$

$$= \alpha \int_0^\infty u^\mu \sin\left[(\operatorname{tg} \pi\alpha)\, 2\gamma u^\alpha\right] e^{-2\gamma u^\alpha}\, du$$

lle μ verschwinden. Endlich folgt dann auch

$$\int_0^\infty \varphi_\nu(x)\,\varphi(x)\,dx = 0$$

lle ν, da nach (23) die $\varphi_\nu(x)$ sich linear aus den $x^{\nu\beta}e^{-\gamma x}$ zusammen-
n.

Die in Formel (28) definierte Funktion $\varphi(x)$ ist also zu sämtlichen
tionen $\varphi_\nu(x)$ orthogonal, d. h. das System (23) von Orthogonal-
ionen ist für $\beta > 2$ nicht mehr abgeschlossen. Damit ist unsere Be-
tung im vollen Umfange bewiesen.

Es läßt sich ferner leicht nach oft angewandten Methoden zeigen,
jedes abgeschlossene System von Orthogonalfunktionen $\varphi_\nu(x)$ im
vall $0 \leqq x < \infty$ auch ein vollständiges Orthogonalsystem bildet, d. h.
ür jede Funktion $g(x)$, deren Quadrat im Lebesgueschen Sinne im
vall $0 \leqq x < \infty$ integrabel ist, die sogenannte Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\int_0^\infty \varphi_\nu(x)\,g(x)\,dx\right)^2 = \int_0^\infty g^2(x)\,dx$$

lt ist. Umgekehrt kann andererseits ein nicht abgeschlossenes Ortho-
lsystem auch nie vollständig sein, d. h. es muß in diesem Falle eine
tion $g(x)$, deren Quadrat im Intervall $0 \leqq x < \infty$ integrabel ist,
der Beschaffenheit existieren, daß

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\int_0^\infty \varphi_\nu(x)\,g(x)\,dx\right)^2 < \int_0^\infty g^2(x)\,dx$$

Diese letzte Behauptung ist unmittelbar einzusehen. Ist nämlich $\varphi(x)$
zu allen Funktionen $\varphi_\nu(x)$ orthogonale Funktion von der Beschaffen-
daß das Integral $\int_0^\infty \varphi^2(x)\,dx$ konvergiert, ohne zu verschwinden,
ird

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\int_0^\infty \varphi_\nu(x)\,\varphi(x)\,dx\right)^2 = 0,$$

gewiß

$$< \int_0^\infty \varphi^2(x)\,dx.$$

Um umgekehrt aus der Abgeschlossenheit des Orthogonalsystems seine
ständigkeit zu erschließen, benutzt man die Substitution [20])

[20]) Vgl. H. Weyl, „Singuläre Integralgleichungen", Inaugural-Dissertation, Göt-
n 1908, S. 18. Abgedruckt in den Math. Ann. Bd. 66 (1909), S. 275–324. Vgl.
sondere S. 277.

(29) $$x = \frac{t}{1-t}, \qquad t = \frac{x}{1+x},$$

die das Intervall $0 \leqq x < \infty$ in das Intervall $0 \leqq t \leqq 1$ überführt.

Setzt man

$$\Phi_\nu(t) = \frac{\varphi_\nu\left(\frac{t}{1-t}\right)}{1-t},$$

so wird

$$\int_0^\infty \varphi_\nu(x)\,\varphi_\mu(x)\,dx = \int_0^1 \Phi_\nu(t)\,\Phi_\mu(t)\,dt.$$

Die Funktionen $\Phi_\nu(t)$ bilden also ein im Intervall $0 \leqq t \leqq 1$ definiertes Orthogonalsystem, das offenbar gleichzeitig mit dem System der Orthogonalfunktionen $\varphi_\nu(x)$ abgeschlossen oder nicht abgeschlossen ist. Für ein Orthogonalsystem im endlichen Intervall schließt man aber in bekannter Weise auf Grund eines Satzes von Herrn Fischer[21]), daß die Abgeschlossenheit des Systems auch seine Vollständigkeit zur Folge hat.

Geht man endlich wieder vermittelst der Substitution (29) von den Funktionen $\Phi_\nu(t)$ zu den Funktionen $\varphi_\nu(x)$ über, so zeigt sich, daß das System der im Intervall $0 \leqq x < \infty$ definierten Orthogonalfunktionen $\varphi_\nu(x)$ gleichfalls der Vollständigkeitsrelation genügt, wenn das Orthogonalsystem der $\Phi_\nu(t)$ vollständig ist.

Für das aus den Laguerreschen Polynomen gebildete Orthogonalsystem ist die Tatsache der Vollständigkeit bereits bekannt[22]), doch benutzen die in den bisherigen Veröffentlichungen angegebenen Beweise sämtlich tiefliegende Sätze aus der Hilbertschen Theorie der quadratischen Formen mit unendlich vielen Veränderlichen. Hier ist der Beweis dieser Tatsache auf elementarem Wege erbracht worden.

Andererseits ist hier aber auch wesentlich mehr bewiesen, denn man erhält das Laguerresche Orthogonalsystem, indem man aus den durch

---

[21]) E. Fischer, C. R. 144 (1907), S. 1022–1024. — Der Beweis des Fischerschen Satzes fußt auf der Lebesgueschen Theorie der bestimmten Integrale. Alle übrigen Gedankengänge unserer Arbeit lassen sich auch mit dem Riemannschen bzw. Stieltjesschen Integralbegriff durchführen.

[22]) Mit der Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Laguerreschen oder den damit eng zusammenhängenden Hermiteschen Polynomen beschäftigen sich die Arbeiten von H. Kiehl, Dissertation, Greifswald 1866; O. Blumenthal, Dissertation Göttingen 1898; Myller-Lebedeff, Dissertation, Göttingen 1906 (abgedruckt in den Math. Ann. Bd. 64 (1907), S. 388–416); W. Stekloff, Communications de la soc. Math. de Charkow 1907; H. Weyl, Dissertation, Göttingen 1908 l. c. Anm. [20]); Rudolf Neumann, Dissertation, Breslau 1912. Ein direkter Nachweis, daß das aus den Laguerreschen Polynomen gebildete Orthogonalsystem der Vollständigkeitsrelation genügt, findet sich nur in der zitierten Arbeit des Herrn Weyl.

iplikation von $e^{-\gamma x}$ mit den sämtlichen ganzzahligen, nicht negativen nzen von x gebildeten Funktionen $e^{-\gamma x}$, $xe^{-\gamma x}$, $x^2 e^{-\gamma x}$, ... zu-

der orthogonale lineare Verbindungen $\sum_{\nu=0}^{\nu} c_{\nu,\nu} x^\nu e^{-\gamma x}$ bildet. Der

ntliche Teil unserer Behauptung ist aber gerade, daß schon das aus nicht negativen geraden Potenzen von x

$$e^{-\gamma x},\quad x^2 e^{-\gamma x},\quad x^4 e^{-\gamma x},\quad \ldots$$

dete System von Orthogonalfunktionen der Vollständigkeitsrelation gt, wohingegen die aus den linearen Verbindungen der Potenzen

$$e^{-\gamma x},\quad x^\beta e^{-\gamma x},\quad x^{2\beta} e^{-\gamma x},\quad \ldots$$

deten Orthogonalfunktionen der Vollständigkeitsrelation nicht mehr gen, wenn $\beta > 2$ ist.

§ 4.

Das Stieltjessche Momentenproblem.

Satz. *Es sei eine Folge von Koeffizienten c_ν von der Beschaffenheit legt, daß die aus ihnen gebildeten, in den Formeln (2) und (3) der eitung definierten Determinanten C_n und B_n sämtlich positiv sind. erdem mögen sich die Koeffizienten c_ν durch die Beziehung*

$$c_\nu \leqq \varrho^\nu (2\nu)!$$

alle ν abschätzen lassen, wobei ϱ eine feste positive Zahl bedeutet. Dann hat das zu dieser Folge gehörige Momentenproblem eine und eine nicht negative Lösung und der Stieltjessche Kettenbruch ist ergent.

Beweis. Wie in der Einleitung auseinandergesetzt worden ist, hat r den Voraussetzungen unseres Satzes das zu der Folge von Koenten c_ν gehörige Momentenproblem sicher mindestens eine Lösung. Wir gehen von der Annahme aus, es seien im Gegensatz zur Behauptung res Satzes $d\varphi(u)$ und $d\psi(u)$ zwei voneinander wesentlich verschiedene. negative Lösungen des vorgelegten Momentenproblems, es sei also

$$\int_0^\infty u^\nu d\varphi(u) = \int_0^\infty u^\nu d\psi(u) = c_\nu.$$

Setzt man

$$\varphi(u) = \int_u^\infty d\varphi(u), \qquad \psi(u) = \int_u^\infty d\psi(u),$$

nd die Funktionen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ positiv und werden mit wachsen- u niemals zunehmen.

Wir behaupten zunächst, daß die Integrale

$$\int_0^\infty u^\nu \varphi(u)\,du, \qquad \int_0^\infty u^\nu \psi(u)\,du$$

konvergieren und beide gleich $\frac{c_{\nu+1}}{\nu+1}$ sind.

Man erhält nämlich, wenn man partiell integriert,

$$(32) \qquad \int_0^a u^{\nu+1}\,d\varphi(u) = -a^{\nu+1}\varphi(a) + (\nu+1)\int_0^a u^\nu \varphi(u)\,du.$$

Andererseits ist aber

$$a^{\nu+1}\varphi(a) = a^{\nu+1}\int_a^\infty d\varphi(u) \leqq \int_a^\infty u^{\nu+1}\,d\varphi(u),$$

also auf Grund der Konvergenz der Integrale (1)

$$\lim_{a=\infty} a^{\nu+1}\varphi(a) = 0.$$

Es folgt also, wie behauptet, wenn man in (32) zur Grenze $a=$ übergeht,

$$\int_0^\infty u^{\nu+1}\,d\varphi(u) = (\nu+1)\int_0^\infty u^\nu \varphi(u)\,du = c_{\nu+1},$$

$$(33) \qquad \int_0^\infty u^\nu \varphi(u)\,du = \frac{c_{\nu+1}}{\nu+1}.$$

Entsprechend beweist man auch

$$(34) \qquad \int_0^\infty u^\nu \psi(u)\,du = \frac{c_{\nu+1}}{\nu+1}.$$

Wir setzen

$$(35) \qquad \chi(u) = (\varphi(u) - \psi(u))\,e^{\gamma\sqrt{u}},$$

wo γ eine positive Konstante bedeutet, über die noch später verfü wird und wollen zeigen, daß wir auf die durch die Formel (35) definier Funktion $\chi(u)$ das Lemma I anwenden können. Offenbar genügt d Funktion $\chi(u)$ wegen (33) und (34) der Voraussetzung

$$\int_0^\infty u^\nu \chi(u)\,e^{-\gamma\sqrt{u}}\,du = 0.$$

Es ist also nur noch nachzuweisen, daß sich eine positive Zahl $\delta <$ bestimmen läßt, so daß das Integral

$$(36) \qquad \int_0^\infty |\chi(u)|\,e^{-\delta\sqrt{u}}\,du = \int_0^\infty |\varphi(u) - \psi(u)|\;e^{(\gamma-\delta)\sqrt{u}}\,du$$

konvergent ist. Dies geschieht vermittels des 2. Hilfssatzes aus § 1, d besagt, daß das Integral (36) sicher dann existiert, wenn die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\gamma-\delta)^{\nu}}{\nu!}\int_0^{\infty}u^{\frac{\nu}{2}}|\varphi(u)-\psi(u)|\,du=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\gamma-\delta)^{2\nu}}{(2\nu)!}\int_0^{\infty}u^{\nu}|\varphi(u)-\psi(u)|\,du+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\gamma-\delta)^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\int_0^{\infty}u^{\nu}\sqrt{u}\,|\varphi(u)-\psi(u)|\,du=\Sigma_1+\Sigma_2$$

nvergiert.

Es ist aber nach der Voraussetzung (30)

$$\int_0^{\infty}u^{\nu}|\varphi(u)-\psi(u)|\,du\leqq\int_0^{\infty}u^{\nu}(\varphi(u)+\psi(u))\,du=\frac{2c_{\nu+1}}{\nu+1}$$

$$\leqq\frac{2\varrho^{\nu+1}(2\nu+2)!}{\nu+1}\leqq 4\varrho\varrho^{\nu}(2\nu+1)!$$

Um auch noch die Koeffizienten der Reihe Σ_2 abzuschätzen, bemerke an zunächst, daß, da $\varphi(u)$ sowohl wie $\psi(u)$ mit wachsendem u nirgends nehmende Funktionen sind,

$$\varphi(u)\leqq\varphi(0)=c_0,\qquad \psi(u)\leqq\psi(0)=c_0$$

Es ergibt sich demzufolge

$$\int_0^{\infty}u^{\nu}\sqrt{u}\,\varphi(u)\,du=\int_0^{1}+\int_1^{\infty}\leqq c_0+\int_0^{\infty}u^{\nu+1}\varphi(u)\,du=c_0+\frac{c_{\nu+2}}{\nu+2}$$

$$\leqq c_0+\varrho^{\nu+2}\frac{(2\nu+4)!}{\nu+2}\leqq C\varrho^{\nu}(2\nu+3)!,$$

o C eine passend gewählte Konstante bedeutet.

Dieselbe Abschätzung findet man aber auch für

$$\int_0^{\infty}\sqrt{u}\,u^{\nu}\psi(u)\,du.$$

an erhält also schließlich

$$\int_0^{\infty}u^{\nu}\sqrt{u}\,|\varphi(u)-\psi(u)|\,du\leqq 2C\varrho^{\nu}(2\nu+3)!.$$

Man setze nunmehr

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{\varrho}},\qquad \delta=\frac{\vartheta}{\sqrt{\varrho}},\qquad (0<\vartheta<1),$$

daß also wie verlangt $\gamma>\delta$, ferner

$$(\gamma-\delta)^2\varrho=(1-\vartheta)^2$$

ird. Dann ergibt sich, wenn man das Ergebnis der Abschätzungen (38), 39) und (40) in (37) einsetzt,

$$\Sigma_1\leqq 4\varrho\sum_{\nu=0}^{\infty}(2\nu+1)(1-\vartheta)^{2\nu},\quad \Sigma_2\leqq\frac{2C}{\sqrt{\varrho}}\sum_{\nu=0}^{\infty}(2\nu+3)(2\nu+2)(1-\vartheta)^{2\nu+1}.$$

Die Reihen Σ_1 und Σ_2 sind aber wegen $\vartheta < 1$ absolut konvergent un damit konvergiert nach dem 2. Hilfssatz auch das Integral (36).

Nunmehr sind wir in der Lage, das Lemma I aus § 2 anzuwende da die in Formel (35) definierte Funktion $\chi(u)$ allen Voraussetzunge dieses Satzes genügt. Wir erhalten also $\chi(u) = 0$ und damit auch $\varphi(u) = \psi(u)$ für alle Werte von u im Intervall $0 \leqq u < \infty$ bis auf eine Meng vom Maße Null. Da außerdem $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ monotone Funktionen sin so folgt auf Grund des 3. Hilfssatzes, daß $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ in allen Stetig keitspunkten übereinstimmen.

Wie in der Einleitung ausgeführt worden ist, folgt aber aus der Ei deutigkeit des Momentenproblems auch die Konvergenz des zugehörige Kettenbruchs. Damit ist der zu Anfang dieses Paragraphen ausgesproche Satz bewiesen.

Wir wollen jetzt Beispiele von Koeffizientenfolgen anführen, die d Bedingungen für die Determinanten $C_n > 0$, $B_n > 0$ genügen und weit die Eigenschaft besitzen, daß das zugehörige Momentenproblem unb stimmt ist.

Als erstes Beispiel wählen wir die Folge von Koeffizienten

$$c_\nu = (2+\delta)\varrho^{\nu+1}\Gamma[(2+\delta)(\nu+1)], \tag{41}$$

wo ϱ und δ beliebige feste positive Zahlen bezeichnen.

Setzt man zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{1}{2+\delta}, \qquad \gamma = \frac{1}{\varrho^\alpha},$$

so liefert, wie sich leicht durch Rechnung nachprüfen läßt, das Differenti

$$d\varphi(u) = \Phi(u)\,du = e^{-\gamma u^\alpha}\,du,$$

eine zu der Koeffizientenfolge (41) gehörige Lösung des Momentenproblem Da die Funktion $\Phi(u)$ positiv ist, genügt die Koeffizientenfolge (41) sich den Bedingungen $C_n > 0$, $B_n > 0$.

Sei ϑ eine beliebige positive reelle Zahl zwischen 0 und 1. Da ist auch die Funktion

$$\Psi(u, \vartheta) = e^{-\gamma u^\alpha}[1 + \vartheta \sin(\gamma u^\alpha \operatorname{tg} \pi\alpha)]$$

positiv. Da ferner auf Grund des Lemmas II des § 2 die Integrale

$$\int_0^\infty u^\nu \sin(\gamma u^\alpha \operatorname{tg} \pi\alpha)\, e^{-\gamma u^\alpha}\,du$$

für alle nicht negativen ganzzahligen ν verschwinden, so wird offenbar

$$\int_0^\infty u^\nu \Psi(u, \vartheta)\,du = c_\nu;$$

Differential $d\psi(u, \vartheta) = \Psi(u, \vartheta)\,du$ liefert also für jeden Wert von zwischen 0 und 1 eine nicht negative Lösung des vorgelegten Momentenblems.

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Folge von Koeffizienten

$$c_\nu = \int_0^\infty u^\nu \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{u} - \log u}{\log^2 u + \pi^2}\right) du \text{ [23]},$$

bei wir zur Abkürzung $\exp(x)$ für e^x schreiben und behaupten:

I. zu jeder noch so kleinen Zahl δ läßt sich eine Zahl N finden, die von δ abhängt, so daß

$$c_\nu \leqq 4\,\Gamma[(2+\delta)(\nu+1)]$$

alle $\nu \geqq N$ ist;

II. das zur Koeffizientenfolge (42) gehörige Momentenproblem ist bestimmt.

Dieses Beispiel zeigt, daß das nach dem zu Anfang dieses Paragraphen mulierten Satze zulässige Anwachsen der Koeffizienten c_ν das stärkste , bei dem man in jedem Falle die Bestimmtheit des zu dieser Folge hörigen Momentenproblems erschließen kann.

Um den ersten Punkt zu beweisen, bestimme man eine nur von δ hängige Konstante ϱ_δ von der Beschaffenheit, daß für alle $u \geqq \varrho_\delta$

$$(\pi u^{\frac{1}{2}} - \log u)\, u^{-\frac{1}{2+\delta}} = \pi u^{\frac{\delta}{2(2+\delta)}} - u^{-\frac{1}{2+\delta}} \log u \geqq \log^2 u + \pi^2$$

rd. Eine solche Konstante ϱ_δ muß existieren, da jede noch so kleine otenz von u stärker wächst als jede noch so große Potenz des Logarithmus. us (43) folgt unmittelbar

$$\exp\left(-\frac{\pi\sqrt{u} - \log u}{\log^2 u + \pi^2}\right) \leqq \exp\left(-u^{\frac{1}{2+\delta}}\right) \quad \text{für} \quad u \geqq \varrho_\delta,$$

d man erhält

$$u^\nu \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{u} - \log u}{\log^2 u + \pi^2}\right) du \leqq \int_{\varrho_\delta}^\infty u^\nu \exp\left(-u^{\frac{1}{2+\delta}}\right) du \leqq (2+\delta)\,\Gamma[(2+\delta)(\nu+1)].$$

Andererseits ist

$$\int_0^{\varrho_\delta} u^\nu \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{u} - \log u}{\log^2 u + \pi^2}\right) du \leqq \int_0^{\varrho_\delta} u^\nu\, du = \frac{\varrho_\delta^{\nu+1}}{\nu+1}.$$

[23] Das Integral (42) konvergiert für jeden nicht negativen Wert von ν, denn r $u = \infty$ wird der Exponent von e negativ unendlich groß wie $-\frac{\pi\sqrt{u}}{\log^2 u}$ und für $u = 0$ rschwindet der Exponent wie $\frac{1}{\log u}$.

Da aber $\Gamma[2(\nu+1)]$ mit zunehmendem ν stärker wächst als die Expo nentialfunktion $\varrho_\delta^{\nu+1}$, so läßt sich wegen (45) eine Zahl $N = N(\delta)$, d nur von δ abhängt, von der Beschaffenheit finden, daß für $\nu \geqq N$

$$(46)\quad \int_0^{\varrho_\delta} u^\nu \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{u}-\log u}{\log^2 u+\pi^2}\right) du \leqq \Gamma[2(\nu+1)] < \Gamma[(2+\delta)(\nu+1)]$$

ist.

Aus (44) und (46) folgt

$$c_\nu \leqq (3+\delta)\Gamma[(2+\delta)(\nu+1)] \leqq 4\,\Gamma[(2+\delta)(\nu+1)]$$

für $\nu \geqq N$. Damit ist der erste Punkt erledigt.

Für den Nachweis der Behauptung II genügt es, wenn gezeigt wir daß für alle nicht negativen ganzzahligen ν die Integrale

$$(47)\quad \int_0^\infty u^\nu \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{u}-\log u}{\log^2 u+\pi^2}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{u}\log u+\pi}{\log^2 u+\pi^2}\right) du$$

verschwinden; denn dann ist für jedes ϑ, das der Beziehung $0 \leqq \vartheta \leqq$ genügt, das Differential

$$d\psi(u,\vartheta) = \Psi(u,\vartheta)\,du = \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{u}-\log u}{\log^2 u+\pi^2}\right)\left[1+\vartheta\sin\left(\frac{\sqrt{u}\log u+\pi}{\log^2 u+\pi^2}\right)\right] d$$

eine nirgends negative Lösung des zu der Folge (42) gehörigen Momente problems.

Um das Verschwinden der Integrale (47) zu beweisen, bemerken w zunächst, daß

$$(48)\quad u^\nu \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{u}-\log u}{\log^2 u+\pi^2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{u}\log u+\pi}{\log^2 u+\pi^2}\right) = \Im\left(u^\nu \exp\left(\frac{1+i\sqrt{u}}{\log u - i\pi}\right)\right)$$

ist.

Wir untersuchen nunmehr das Integral

$$\int_0^R u^\nu \exp\left(\frac{1+i\sqrt{u}}{\log u - i\pi}\right) du,$$

auf das wir den Cauchyschen Integralsatz anwenden wollen, und zw integrieren wir längs eines geschlossenen Weges, der sich aus dem Stüc der reellen Achse von $-R$ bis $+R$ und dem über dieser Strecke a Durchmesser in der Halbebene der Zahlen mit positivem Imaginärt errichteten Halbkreis K_R zusammensetzt. Man erhält demzufolge

$$(49)\quad \int_0^R u^\nu \exp\left(\frac{1+i\sqrt{u}}{\log u - i\pi}\right) du = \int_0^{-R} - \int_{K_R},$$

da die zu integrierende Funktion im Innern des von dem Integratio wege umschlossenen Gebietes keine Singularitäten besitzt und sich ihr Randwerten stetig nähert, wie gleich noch näher geprüft werden so

rt man nämlich Polarkoordinaten $u = re^{i\alpha}$ ein, dann wird die zu in-rierende Funktion

$$F_\nu(r, \alpha) = r^\nu \exp\left\{\nu i\alpha - \frac{\sqrt{r}\left(\sin\frac{\alpha}{2} - i\cos\frac{\alpha}{2}\right) - 1}{\log r - i(\pi - \alpha)}\right\}$$

ihr absoluter Betrag

$$) \qquad F_\nu(r, \alpha) = r^\nu \exp\left\{-\frac{\sqrt{r}\left[\log r \sin\frac{\alpha}{2} + (\pi - \alpha)\cos\frac{\alpha}{2}\right] - \log r}{\log^2 r + (\pi - \alpha)^2}\right\}.$$

Für $u = -1$ bzw. $r = 1$, $\alpha = \pi$ verschwinden Zähler und Nenner Exponenten in $F_\nu(r, \alpha)$ beide von erster Ordnung in u; die Stelle also regulär. Die einzige Singularität von $F_\nu(r, \alpha)$ auf dem Rande betrachteten Gebietes befindet sich an der Stelle $u = 0$. Doch zeigt mel (50), daß für $0 \leqq \alpha \leqq \pi$ die Funktion $F_\nu(r, \alpha)$ in der Umgebung Stelle $r = 0$ beschränkt bleibt und sich dem Randwert stetig nähert, der Exponent von e für $r = 0$ wie $\frac{1}{\log r}$ verschwindet.

Andererseits wird

$$) \qquad \int_{K_R} = i\int_0^{2\pi} F_\nu(R, \alpha) Re^{i\alpha} d\alpha.$$

Nun erkennt man aber aus (50), daß gleichmäßig in α für $0 \leqq \alpha \leqq \pi$

$$\lim_{R=\infty} R\,|F_\nu(R, \alpha)| = 0$$

d, daß also das Integral (51) im Grenzfall $R = \infty$ verschwindet.

Geht man nunmehr auch in (49) zur Grenze $R = \infty$ über, so er-t sich

$$2) \qquad \int_0^\infty u^\nu \exp\left(\frac{1 + i\sqrt{u}}{\log u - i\pi}\right) du = \int_0^\infty u^\nu \exp\left(\frac{1 + i\sqrt{u}}{\log u - i\pi}\right) du.$$

Das Integral rechter Hand von (52) wird aber, wenn man $= e^{i\pi} v = -v$ substituiert, für nicht negative, ganzzahlige ν gleich

$$(-1)^{\nu+1} \int_0^\infty v^\nu \exp\left(\frac{1 - \sqrt{v}}{\log v}\right) dv,$$

d ist also reell: folglich muß der imaginäre Teil des Integrals linker nd von (52)

$$3) \qquad \Im\left(\int_0^\infty u^\nu \exp\left(\frac{1 + i\sqrt{u}}{\log u - i\pi}\right) du\right)$$

alle ganzzahligen nicht negativen Werte von ν verschwinden.

Wegen (48) ist aber das Integral (53) nichts anderes als das Integral 7) und hiermit ist auch die Behauptung II bewiesen.

§ 5.. Über eine Verallgemeinerung des Stieltjesschen Momentenproblem

Es sei eine Koeffizientenfolge c_ν von der Beschaffenheit vorgeleg daß die in der Einleitung Formel (2) angegebenen, aus den c_ν gebildet Hankelschen Determinanten C_n für jedes n positiv sind, wohingeg über die Determinanten B_n der Formel (3) nichts vorausgesetzt werd soll. Aus $C_n > 0$ folgt, daß die Koeffizienten $c_{2\nu}$ sämtlich positiv sir während das Vorzeichen der Koeffizienten $c_{2\nu+1}$ keiner einschränkenden E dingung unterliegt.

Unter diesen Voraussetzungen ist die formale Existenz des zu dies Folge gehörigen Stieltjesschen Kettenbruchs nicht mehr in allen Fäll gesichert. Indessen kann man der mit diesen Koeffizienten gebildet formalen Potenzreihe

$$S(z) = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \cdots \tag{54}$$

einen anderen Kettenbruch zuordnen, den Herr Perron den zu $S($ assoziierten Kettenbruch nennt; dieser ist von der Form

$$K(z) = \frac{k_1}{z+l_1} + \frac{k_2}{z+l_2} + \frac{k_3}{z+l_3} + \cdots \text{ [24]}, \tag{55}$$

seine Koeffizienten k_ν sind sämtlich negativ mit Ausnahme von k_1, >0 ist. Die l_ν ergeben sich als beliebige reelle Größen.

Der n-te Näherungsbruch des Kettenbruchs (55) ist eine ration Funktion und läßt sich in der Umgebung der Stellen $z=\infty$ in e Potenzreihe

$$S_n(z) = \frac{c_{n,0}}{z} - \frac{c_{n,1}}{z^2} + \frac{c_{n,2}}{z^3} - \cdots$$

entwickeln, die für genügend große Werte von z konvergiert.

Für den mit einer Potenzreihe $S(z)$ der Form (54) assoziier Kettenbruch ist charakteristisch, daß die $2n$ ersten Koeffizienten Entwicklung $S_n(z)$ seines n-ten Näherungsbruches mit den $2n$ ers Koeffizienten der Reihe $S(z)$ übereinstimmen, so daß also

$$c_{n,0} = c_0,\ c_{n,1} = c_1,\ \ldots,\ c_{n,2n-1} = c_{2n-1} \tag{56}$$

wird[25]).

Durch die Form des Kettenbruches (55) und die Beziehung (56) der assoziierte Kettenbruch $K(z)$ eindeutig bestimmt.

---

[24]) Vgl. O. Perron, Lehrbuch, S. 322 und S. 377. Stieltjes erwähnt di Kettenbruch auch in der Einleitung seiner Arbeit VIII, S. 3 Formel (I d)

[25]) In der Dissertation des Herrn Grommer wird der Kettenbruch $K(z)$ der Reihe $S(z)$ durch formale Entwickelung gewonnen. Vgl. Journal f. Math., Anm. [12]) S. 118—121.

Wie sich auf einfache Weise zeigen läßt, ist die Bedingung für die effizientendeterminanten, $C_n > 0$, notwendig und hinreichend dafür, ß der mit der Potenzreihe $S(z)$ der Form (54) assoziierte Kettenbruch (z) formal existiert und daß seine Koeffizienten k_ν mit Ausnahme des mer positiven k_1 sämtlich negativ werden[26]).

Wenn außer dem Koeffizientendeterminanten C_n auch die Determinten B_n sämtlich positiv und von 0 verschieden sind, so daß auch der dieser Folge gehörige Stieltjessche Kettenbruch existiert, so zeigt h, daß der n-te Näherungsbruch des assoziierten Kettenbruchs mit dem -ten Näherungsbruch des Stieltjesschen Kettenbruchs übereinstimmt. diesem Falle ist also (vgl. die Fälle I und II S. 186 u. 187 der Einleitung) r assoziierte Kettenbruch sicher konvergent. Dies ist aber, wie Herr rommer an einem Beispiel gezeigt hat, im allgemeinen nicht der Fall[27]).

An die Stelle der Konvergenz des Kettenbruches tritt hier vielmehr e Konvergenz einer passend ausgewählten Folge von Näherungsbrüchen n $K(z)$, wie aus dem folgendem Satze des Herrn Grommer hervorht[28]):

Ist $K(z)$ ein formaler mit einer Potenzreihe $S(z)$, deren Koeffizienn den Bedingungen $C_n > 0$ genügen, assoziierter Kettenbruch, so läßt ch eine unendliche Folge von Näherungsbrüchen $K_{n_\nu}(z)$ des Kettenuches $K(z)$, $(n_1 < n_2 < \ldots \to \infty)$, so auswählen, daß die $K_{n_\nu}(z)$ mit achsendem ν in jedem abgeschlossenen Bereiche der z-Ebene, der kein ück der Achse der reellen Zahlen enthält, gleichmäßig gegen eine anatische Funktion $f(z)$ konvergieren. Die Funktion $f(z)$ läßt sich ferner der Form

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u}$$

arstellen.

Hier bedeutet $d\varphi(u)$ ein nicht negatives Differential von der Behaffenheit, daß die Funktion

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{u} d\varphi(v)$$

irgends abnimmt. Endlich kann man auch zeigen[29]), daß die Integrale

[26]) Vgl. J. Grommer, Dissertation, S. 122; vgl. auch Perron, Lehrbuch, 324.

[27]) Vgl. J. Grommer, Dissertation, S. 143 ff. Eine erschöpfende Untersuchung ber die Konvergenztheorie der Kettenbrüche der Form (55) gedenken wir an anderer telle zu veröffentlichen.

[28]) Vgl. J. Grommer, Dissertation, S. 137 ff.

[29]) Der Beweis dieser Behauptung, die unseres Wissens bisher noch nicht ausesprochen worden ist, bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten, und soll an andrer telle veröffentlicht werden.

$$\int_{\infty}^{+\infty} u^\nu d\varphi(u)$$

sämtlich konvergieren und gleich den Koeffizienten c_ν sind.

Die Frage nach einer nirgends abnehmenden Funktion $\varphi(u)$ mit der Eigenschaft, daß die Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^\nu d\varphi(u) = c_\nu$$

sind, wollen wir das Momentenproblem im weiteren Sinne nennen. Das Grommersche Auswahlverfahren liefert uns also zu jeder Koeffizientenfolge c_ν, die den Determinantenbedingungen $C_n > 0$ genügt, eine Lösung des erweiterten Momentenproblems. Umgekehrt läßt sich leicht einsehen, daß jede Folge von Koeffizienten c_ν von der Beschaffenheit, daß mindestens eine Lösung des zugehörigen Momentenproblems im weiteren Sinne existiert, den Bedingungen $C_n > 0$ genügt.

Das Grommersche Auswahlverfahren läßt ferner erkennen, daß, falls der zu $S(z)$ assoziierte Kettenbruch $K(z)$ nicht konvergiert, sich mindestens zwei untereinander verschiedene Folgen von Näherungsbrüchen $K_{n_\nu}(z)$ und $K_{m_\nu}(z)$ von der Beschaffenheit auswählen lassen, daß

$$\lim_{\nu=\infty} K_{n_\nu}(z) = f_1(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi_1(u)}{z+u},$$

$$\lim_{\nu=\infty} K_{m_\nu}(z) = f_2(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi_2(u)}{z+u}$$

wird. Hierbei sind $f_1(z)$ und $f_2(z)$ bzw $\varphi_1(u)$ und $\varphi_2(u)$ voneinander verschieden. Daraus folgt umgekehrt, daß der assoziierte Kettenbruch jedenfalls dann konvergiert, wenn das zugehörige Momentenproblem im weiteren Sinne nur eine einzige Lösung hat[30]).

Wir wollen jetzt — analog zu dem im vorigen Paragraphen aufgestellten Satz über das Stieltjessche Momentenproblem — den folgenden Satz beweisen:

Satz: *Ist eine Folge von Koeffizienten c_ν vorgelegt, die den Bedingungen $C_n > 0$ genügen und für die sich eine Zahl ϱ von der Beschaffenheit bestimmen läßt, daß für alle ν*

$$|c_\nu| \leqq \varrho^\nu \nu! \tag{57}$$

[30]) Umgekehrt braucht, wenn der assoziierte Kettenbruch $K(z)$ konvergiert, das zugehörige erweiterte Momentenproblem nicht bestimmt zu sein. Genügt z. B. die Koeffizientenfolge c_ν den Bedingungen $C_n > 0$ und $B_n > 0$, so ist, wie wir oben gesehen haben, der zugehörige assoziierte Kettenbruch immer konvergent, obgleich dann sogar das Momentenproblem im engeren Sinne mehrere Lösungen haben kann, also um so mehr das erweiterte Momentenproblem.

rd, so ist das zu dieser Folge gehörige erweiterte Momentenproblem stimmt und damit auch der zugehörige assoziierte Kettenbruch konrgent[31]).

Beweis. Unter den Voraussetzungen unseres Satzes hat das zu der olge von Koeffizienten c_ν gehörige erweiterte Momentenproblem sicher indestens eine Lösung.

Wir gehen wieder von der Annahme aus, es seien $d\varphi(u)$ und $d\psi(u)$ vei voneinander wesentlich verschiedene, positive Lösungen des vorlegten Momentenproblems, so daß also die Funktionen

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{u} d\varphi(v), \qquad \psi(u) = \int_{-\infty}^{u} d\psi(v)$$

rgends abnehmen; dann wird, wenn man $\varphi(u) - \psi(u) = \chi(u)$ setzt,

$$\int_{\infty}^{+\infty} u^\nu d\chi(u) = 0. \tag{8}$$

Es ist nun aber wegen (57):

$$\int_{0}^{\infty} u^{2\nu} |d\chi(u)| \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2\nu} (d\varphi(u) + d\psi(u)) \leqq 2\varrho^{2\nu}(2\nu)., \tag{9}$$

[31]) In einer Arbeit, die demnächst an andrer Stelle erscheinen wird, habe ich e Konvergenz des zu einer Potenzreihe, deren Koeffizienten den Bedingungen $C_n > 0$ id der Abschätzung (57) genügt, assoziierten Kettenbruches direkt ohne Zuhilfenahme r Stieltjesschen Integraldarstellungen bewiesen, und zwar wird dort gezeigt, daß ter den angegebenen Bedingungen die überall divergente Potenzreihe nach der orelschen Methode summierbar ist und der Kettenbruch gegen die durch die orelsche Summationsmethode aus der Potenzreihe gewonnene Funktion konvergiert.

Das allgemeinste unter den bisher bekannten Resultaten dieser Art war im Anhluß an die S. 191 Anm. [9]) zitierte Arbeit des Herrn Perron von Herrn Szász angeben worden in einer Arbeit: „Bemerkungen zu Herrn Perrons Erweiterung eines arkoffschen Satzes über die Konvergenz gewisser Kettenbrüche", Math. Ann. d. 76 (1915), S. 301–314.

Der Szászsche Satz lautet: Ist eine reelle nirgends abnehmende Funktion $\varphi(u)$ i Intervall $-\infty < u < -\infty$ von der Beschaffenheit definiert, daß alle Integrale

$$c_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} u^\nu d\varphi(u)$$

onvergieren, und gilt außerdem für unendlich viele ν (also nicht notwendig für lle ν) die Beziehung

$$c_{2\nu} \leq \varrho^{2\nu} \nu!,$$

konvergiert der zu der Reihe $S(z)$ assoziierte Kettenbruch gegen die Funktion

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u}.$$

$$(60)\qquad \int_0^{\infty} u^{2\nu-1}\, d\chi(u)| \leqq \int_0^{1} |d\chi(u)| + \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2\nu}(d\varphi(u) + d\psi(u))$$

$$\leqq 2c_0 + 2\varrho^{2\nu}(2\nu)! \leqq C\varrho^{2\nu}(2\nu)!,$$

wo C eine passend gewählte Konstante bedeutet.

Entsprechend ergibt sich

$$(61)\qquad \int_0^{-\infty} u^{2\nu} |d\chi(u)| \leqq 2\varrho^{2\nu}(2\nu)!,$$

$$(62)\qquad \int_0^{-\infty} |u|^{2\nu-1} |d\chi(u)| \leqq C\varrho^{2\nu}(2\nu)!.$$

Sei γ eine positive Zahl $< \frac{1}{\varrho}$.

Bildet man die Integrale

$$(63)\qquad F(\gamma) = \int_0^{\infty} e^{\gamma u} d\chi(u), \qquad G(-\gamma) = \int_0^{-\infty} e^{-\gamma u} d\chi(u),$$

so kann man, wenn man sich für $e^{\gamma u}$ bzw. $e^{-\gamma u}$ ihre Darstellungen durch Potenzreihen in die Integrale (63) substituiert denkt, auf Grund der Beziehungen (59), (60), (61), (62) und wegen $\gamma\varrho < 1$ den 2. Hilfssatz des § 1 über gliedweise Integration von Reihen auf die Integrale (63) anwenden und erkennt, daß die Integrale (63) absolut konvergent sind.

Andererseits ist, wenn

$$\int_u^{\infty} |d\chi(v)| = \tilde{\chi}_1(u), \qquad \int_0^{\infty} |d\chi(v)| = \tilde{b}_1$$

gesetzt wird,

$$\int_0^{R} e^{\gamma u} |d\chi(u)| = \tilde{b}_1 - \tilde{\chi}_1(R) e^{\gamma R} + \gamma \int_0^{R} e^{\gamma u} \tilde{\chi}_1(u)\, du.$$

Es ist aber

$$\tilde{\chi}_1(R) e^{\gamma R} = e^{\gamma R} \int_R^{\infty} |d\chi(u)| \leqq \int_R^{\infty} e^{\gamma u} |d\chi(u)|,$$

also ist wegen der absoluten Konvergenz des Integrals (63)

$$\lim_{R=\infty} \tilde{\chi}_1(R) e^{\gamma R} = 0,$$

$$\int_0^{\infty} e^{\gamma u} |d\chi(u)| = \tilde{b}_1 + \gamma \int_0^{\infty} e^{\gamma u} \tilde{\chi}_1(u)\, du.$$

Setzt man nunmehr

$$(64)\qquad \int_u^{\infty} d\chi(v) = \chi_1(u), \qquad \int_0^{\infty} d\chi(u) = b_1,$$

wird offenbar, da

$$|\chi_1(u)| \leqq \tilde{\chi}_1(u)$$

)
$$F(\gamma) = \int_0^{\infty} e^{\gamma u}\, d\chi(u) = b_1 + \gamma \int_0^{\infty} e^{\gamma u} \chi_1(u)\, du,$$

bei das Integral rechter Hand absolut konvergiert.

Entsprechend erhält man für $G(-\gamma)$ die absolut konvergente Integral-rstellung

)
$$G(-\gamma) = b_2 + \gamma \int_0^{-\infty} e^{-\gamma u} \chi_2(u)\, du,$$

nn zur Abkürzung

)
$$\int_u^{-\infty} d\chi(v) = \chi_2(u), \qquad \int_0^{-\infty} d\chi(u) = b_2$$

etzt wird.

Wir betrachten jetzt die Funktionen

)
$$\begin{cases} F(z) = \int_0^{\infty} e^{zu}\, d\chi(u) = b_1 + z \int_0^{\infty} e^{zu} \chi_1(u)\, du, \\ G(z) = \int_0^{-\infty} e^{zu}\, d\chi(u) = b_2 + z \int_0^{-\infty} e^{zu} \chi_2(u)\, du \end{cases}$$

d erkennen, daß wegen der absoluten Konvergenz der Integrale (65) d (66) die beiden Integraldarstellungen von $F(z)$ für $\Re(z) \leqq \gamma$ und e beiden Integraldarstellungen von $G(z)$ für $\Re(z) \geqq -\gamma$ absolut und eichmäßig gegen eine analytische Funktion konvergieren. Die Funktion (z) bleibt also in der ganzen unendlichen Halbebene $\Re(z) \leqq \gamma$ unter-lb einer festen Schranke; das gleiche gilt von $G(z)$ in der Halbebene $(z) \geqq -\gamma$.

Der 2. Hilfssatz zeigt nun weiter, daß für $|z| \leqq \gamma$ wegen (59), (60), 1) und (62) die Integrale

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(zu)^{\nu}}{\nu!} \right) d\chi(u) \quad \text{und} \quad \int_0^{-\infty} e^{zu}\, d\chi(u) = \int_0^{-\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(zu)^{\nu}}{\nu!} \right) d\chi(u)$$

iedweise integriert werden dürfen; es ergeben sich demnach für $F(z)$ nd $G(z)$ die Darstellungen durch Potenzreihen

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu!} \int_0^{\infty} u^{\nu}\, d\chi(u), \qquad G(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu!} \int_0^{-\infty} u^{\nu}\, d\chi(u),$$

e mindestens für $|z| \leqq \gamma$ konvergieren.

Andererseits erkennt man aus (58), daß

$$\int_0^{\infty} u^\nu d\chi(u) = \int_0^{-\infty} u^\nu d\chi(u) \qquad \text{für } \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

ist. Es ergibt sich also

$$F(z) = G(z). \tag{69}$$

Da nun $F(z)$ in der Halbebene $\Re(z) \leqq \gamma$, $G(z)$ in der Halbebene $\Re(z) \geqq -\gamma$ beschränkt ist, so ist $F(z)$ wegen (69) in der ganzen Ebene beschränkt, ist also nach dem Liouvilleschen Satze gleich einer Konstanten. Für $z = 0$ wird aber wegen (68) $F(z) = b_1$, folglich, da diese Beziehung in der ganzen Ebene bestehen muß, erhält man identisch in

$$z \int_0^{\infty} e^{zu} \chi_1(u) du = 0,$$

und nach dem Eindeutigkeitssatze des Herrn Lerch[32])

$$\chi_1(u) = 0$$

bis auf eine Menge vom Maße Null.

Es ist aber nach Formel (64) für $u \geqq 0$

$$\chi_1(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\chi(v) - \int_{-\infty}^{u} d\chi(v) = -\chi(u) = -(\varphi(u) - \psi(u)).$$

Daraus folgt, da $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ monotone Funktionen sind, unter Benutzung des 3. Hilfssatzes, daß für $u \geqq 0$ die Funktionen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ in allen Stetigkeitspunkten übereinstimmen müssen.

Dasselbe beweist man für negative u, indem man berücksichtigt, daß in Hinblick auf die Identität (69) das Integral

$$z \int_0^{-\infty} e^{z}$$

und damit auch die Funktion $\chi_2(u)$ bis auf eine Menge vom Maße Null verschwinden muß. Nun ist aber nach Formel (67) für $u \leqq 0$

$$\chi_2(u) = -\int_{-\infty}^{u} d\chi(v) = -\chi(u) = -(\varphi(u) - \psi(u));$$

also ist auf Grund des 3. Hilfssatzes auch für $u \leqq 0$ in allen Stetigkeitspunkten $\varphi(u) = \psi(u)$. Damit ist unser Satz vollständig bewiesen.

Ähnlich wie im § 4 soll nunmehr gezeigt werden, daß das nach dem eben bewiesenen Satze zulässige Anwachsen der Koeffizienten c_ν das stärkste ist, das in allen Fällen die Bestimmtheit des zu dieser Folge gehörigen

[32]) Vgl. Anm. [16]) S. 198.

mentenproblems im weiteren Sinne und die Konvergenz des zugehörigen
ɔziierten Kettenbruches sichert.

Wir wollen jetzt nämlich eine im Intervall $-\infty < u < +\infty$ definierte
itive reelle Funktion $\Phi(u)$ von der Beschaffenheit angeben, daß *erstens*
mit Hilfe dieser Funktion gebildeten Integrale

$$c_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} u^\nu \Phi(u)\, du$$

alle nicht negativen Werte von ν existieren und sich zu jeder noch
kleinen positiven Zahl δ eine Zahl N, die nur von δ abhängt, in der
ise bestimmen läßt, daß für alle $\nu \geqq N$

$$|c_\nu| \leqq \Gamma[(1+\delta)(\nu+1)]$$

zweitens, daß das zu der Folge (70) von Koeffizienten c_ν gehörige
mentenproblem im weiteren Sinne unbestimmt ist, und *drittens*, daß
mit der aus den Koeffizienten (70) gebildeten Potenzreihe $S(z)$ asso-
rte Kettenbruch $K(z)$ divergent ist. Zu diesem Zwecke setze man

$$\Phi(u) = |u| \exp\left(-\frac{\pi|u| - 2\log|u|}{4\log^2|u| + \pi^2}\right).$$

Funktion $\Phi(u)$ ist eine gerade Funktion, d. h. es ist

$$\Phi(-u) = \Phi(u).$$

glich erhält man

$$c_{2\nu+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2\nu+1} \Phi(u)\, du = 0,$$

$$c_{2\nu} = 2\int_0^\infty u^{2\nu} \Phi(u)\, du = 2\int_0^\infty u^{2\nu+1} \exp\left(-\frac{\pi u - 2\log u}{4\log^2 u + \pi^2}\right) du$$

$$= \int_0^\infty v^\nu \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{v} - \log v}{\log^2 v + \pi^2}\right) dv,$$

ın man in dem Integral (73) die Substitution $v = u^2$ ausführt.

Da die Koeffizienten $c_{2\nu+1}$ sämtlich $= 0$ sind, so genügen sie sicher
Abschätzung (71); die Integraldarstellungen (73) für $c_{2\nu}$ sind aber
den Integralen (42) des § 4 identisch und genügen, wie dort gezeigt
rden ist, für jede beliebig kleine positive Zahl δ bei hinreichend
ßem $\nu \geqq N'(\delta)$ der Abschätzung

$$c_{2\nu} \leqq \Gamma[(2+\delta)(\nu+1)].$$

Man wähle jetzt eine positive Zahl $N = N(\delta)$, so daß erstens
$\geqq N'(\delta)$, zweitens $N \geqq \frac{1}{\delta}$ wird. Wegen dieser zweiten Bedingung für
ist dann für alle $\nu \geqq N(\delta)$

$$(2+\delta)(\nu+1) \leqq (1+\delta)(2\nu+1).$$

Aus (74) und (75) folgt nunmehr für alle $\nu \geqq N$

$$c_{2\nu} \leqq \Gamma[(1+\delta)(2\nu+1)],$$

womit der erste Teil unserer Behauptung bewiesen ist.

Um den zweiten Teil unserer Behauptung nachzuweisen, betrachtet man die Funktion

$$\Psi(u,\vartheta) = |u| \exp\left(-\frac{\pi|u| - 2\log|u|}{4\log^2|u| + \pi^2}\right)\left(1 + \vartheta \sin\frac{2|u|\log|u| + \pi}{4\log^2|u| + \pi^2}\right),$$

die für jedes ϑ, das der Beziehung $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ genügt, sicher nicht negativ ist. Es soll nunmehr gezeigt werden, daß für jedes feste ϑ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^\nu \Psi(u,\vartheta)\, du = c_\nu$$

wird:

Da auch $\Psi(u,\vartheta)$ für jedes feste ϑ eine gerade Funktion von u ist, so ist zunächst wegen (72)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^{2\nu+1} \Psi(u,\vartheta)\, du = 0 = c_{2\nu+1},$$

$$(76) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2\nu} \Psi(u,\vartheta)\, du = 2\int_0^\infty u^{2\nu} \Psi(u,\vartheta)\, du$$

$$= \int_0^\infty v^\nu \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{v} - \log v}{\log^2 v + \pi^2}\right)\left(1 + \vartheta \sin\frac{\sqrt{v}\log v - \pi}{\log^2 v + \pi^2}\right) dv,$$

wenn man wieder $u^2 = v$ in das Integral substituiert.

Nun verschwinden aber, wie in § 4 gezeigt worden ist, die Integrale

$$\int_0^\infty v^\nu \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{v} - \log v}{\log^2 v + \pi^2}\right) \sin\frac{\sqrt{v}\log v + \pi}{\log^2 v + \pi^2} dv$$

für alle nicht negativen ganzzahligen Werte von ν. Folglich sind die Integrale (76) wegen (73) für jeden Wert von ϑ zwischen 0 und 1 gleich $c_{2\nu}$, womit auch der zweite Teil unserer Behauptung bewiesen ist.

Es seien jetzt

$$S(z) = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_{2\nu}}{z^{2\nu+1}} \qquad \text{wegen (72)}$$

$$T(x) = \frac{c_0}{x} - \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_4}{x^3} - \ldots$$

Potenzreihen, die vermittels der den Formeln (72) und (73) entnommenen Koeffizienten c_ν gebildet sind. Die Integraldarstellung der Koeffizienten c_ν läßt erkennen, daß die Koeffizienten von $S(z)$ den Bedingungen $C_n > 0$ und die Koeffizienten von $T(x)$ den Bedingungen $C_n > 0$, $B_n > 0$ genügen

istiert demzufolge der der Potenzreihe $S(z)$ assoziierte Kettenbruch $K(z)$ der der Potenzreihe $T(x)$ zugeordnete Stieltjessche Kettenbruch $H(x)$. Der Kettenbruch $H(x)$ ist jedenfalls divergent, da das zu der Folge (73) Koeffizienten $c_{2\nu}$ gehörige Stieltjessche Momentenproblem, wie in § 4 vor allem Formel (47)) bewiesen worden ist, unbestimmt ist. Um ch den dritten Punkt unserer Behauptung zu beweisen, soll jetzt gezeigt en, daß auch der mit $S(z)$ assoziierte Kettenbruch $K(z)$ divergiert. Substituiert man $x = -z^2$, so wird wegen $c_{2\nu+1} = 0$

$$T(-z^2) = -\frac{1}{z}S(z),$$

$$H(-z^2) = \cfrac{1}{-a_1 z^2 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{-a_3 z^2 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}}},$$

lie a_ν positive Konstanten bedeuten.

Man betrachte nunmehr den Kettenbruch

$$K^*(z) = \cfrac{-\frac{1}{z a_1}}{1 + \cfrac{\frac{-1}{a_1 a_2}}{z + \cfrac{\frac{-1}{a_2 a_3}}{z + \ddots}}}$$

n ist nach einem formalen Transformationssatze aus der Theorie der tenbrüche $K^*(z)$ äquivalent $H(-z^2)$ [33]). Hierbei sind unter äquinten Kettenbrüchen solche Kettenbrüche zu verstehen, deren sämtliche erungsbrüche gleicher Ordnung miteinander übereinstimmen, so daß aus der Divergenz (Konvergenz) des einen Kettenbruches die Dienz (Konvergenz) der anderen folgt. Da der Kettenbruch $H(-z^2)$, wir gesehen haben, divergent ist, ist folglich auch der Kettenbruch (z) divergent.

Nun ist aber

$$K^*(z) = -\frac{1}{z}K(z),$$

n erstens hat $-zK^*(z)$ die formalen Eigenschaften der assoziierten tenbrüche der Form (55), und zwar sind die dort mit l_ν bezeichneten ffizienten gleich Null,

$$k_1 = \frac{1}{a_1}, \qquad k_\nu = -\frac{1}{a_{\nu-1}a_\nu}, \qquad \nu \geqq 2,$$

k_1 positiv und die übrigen k_ν negativ.

[33]) Vgl. z. B. Perron, Lehrbuch, S. 196.

Zweitens: Bedeuten $T_n(x)$ bzw. $S_n(z)$ Potenzreihen, die für genügend große Werte von x bzw. z konvergieren und die n-ten Näherungsbrüche von $H(x)$ bzw. $-zH(-z^2) \sim -zK^*(z)$ darstellen, so wird nach den Gesetzen der Zuordnung von Stieltjesschem Kettenbruch und Potenzreihe zueinander

$$T_n(x) = \frac{c_0}{x} - \frac{c_2}{x^2} \ldots + (-1)^{n-1} \frac{c_{2n-2}}{x^n} + (-1)^n \frac{c_{n,2n}}{x^{n+1}} + \ldots$$

und

$$(77) \qquad S_n(z) = -zT_n(-z^2) = \frac{c_0}{z} + \frac{c_2}{z^3} + \ldots + \frac{c_{2n-2}}{z^{2n-1}} + \frac{c_{n,2n}}{z^{2n+1}} + \ldots$$

Formel (77) läßt aber erkennen, daß $S_n(z)$ den Bedingungen (5) genügt, also der n-te Näherungsbruch des zu der Potenzreihe $S(z)$ assoziierten Kettenbruches $K(z)$ ist.

Es ist folglich wie behauptet

$$-zH(-z^2) \sim -zK^*(z) \equiv K(z),$$

also $K(z)$ divergent. W. z. b. w.

Berlin-Adlershof, den 4. April 1918.

(Eingegangen am 22. Dezember 1918.)

er ein Analogon der Wronskischen Determinante bei Funktionen mehrerer Veränderlicher.

Von

Alexander Ostrowski in Göttingen.

Hängen m hinreichend oft differentiierbare Funktionen

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$$

von einer Variabel x ab, so besteht bekanntlich die notwendige und eichende Bedingung für die lineare Unabhängigkeit des Funktionen-ems (1) im allgemeinen darin, daß die Wronskische Determinante

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \cdots f_m \\ f_1' & f_2' \cdots f_m' \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ f_1^{(m-1)} & f_2^{(m-1)} \cdots f_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

t identisch verschwindet. Es scheint aber noch nicht bemerkt worden ein, daß auch im Falle, wo die Funktionen (1) von mehreren Variablen

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

ingen, ganz analoge Determinanten gebildet werden können, in denen gewisse Unbestimmten vorkommen, und die dann für das Funktionen-em (1) dieselbe Bedeutung besitzen, wie die Wronskische Determinante den Fall einer Variabel. Für den Fall einer Variabel gehen auch re Determinanten direkt in die Wronskische über.

Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ n ganze nicht negative von einander ver-edene Zahlen und man setze allgemein $x_k = u_{\alpha_k}$. Ist i eine von den len $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ verschiedene ganze nicht negative Zahl, so soll unter ine neue Unbestimmte verstanden werden, so daß wir unendlich viele abeln haben

$$u_0, u_1, \ldots$$

von denen n, abgesehen von der Reihenfolge, mit $x_1, \ldots, x_n$ übere stimmen. Wir betrachten nun den Differentiationsprozeß

$$\Pi = \frac{\partial}{\partial u_0} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_3 \frac{\partial}{\partial u_2} + u_4 \frac{\partial}{\partial u_3} + \ldots = \frac{\partial}{\partial u_0} + \sum_{i=1}^{i=\infty} u_{i+1} \frac{\partial}{\partial u_i},$$

wo natürlich bei der Anwendung auf bestimmte Funktionen stets r endlich viele Glieder in Betracht kommen. Ersetzen wir in den Fu tionen $f(x)$ die Variabeln x_k durch die entsprechenden Variabeln u_{a_k} u bezeichnen die so entstehenden Funktionen durch $f_i(u)$, so lautet uns Determinante

$$\Delta(f_i(u)) = \begin{vmatrix} f_1(u) & f_2(u) & \ldots & f_m(u) \\ \Pi f_1(u) & \Pi f_2(u) & & \Pi f_m(u) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Pi^{m-1} f_1(u) & \Pi^{m-1} f_2(u) & \ldots & \Pi^{m-1} f_m(u) \end{vmatrix}.$$

Es besteht nun der Satz, daß für die Existenz einer identisch linearen Relation mit konstanten Koeffizienten zwischen den Funktionen das identische Verschwinden der obigen Determinante in allen u_k n*wendig* und, für den Fall analytischer Funktionen, auch *hinreichend* i Für nicht analytische Funktionen bedarf der Satz, ebenso wie im Falle ei Variabel für die Wronskische Determinante, noch weiterer Präzisieru

Alle Unbestimmten u_i, die nicht in den Funktionen $f_i(u)$ vorkomm kommen in der Determinante $\Delta(f_i(u))$ ganz rational vor. Entwickelt m nach Potenzprodukten dieser Unbestimmten, so zerfällt die Bedingung identischen Verschwindens von $\Delta(f_i(u))$ in mehrere Bedingungen, die s auf die in $f(u)$ vorkommenden u_i, d. h., auf die Variabeln x_i bezieh Es ist jedoch bequemer, mit der Determinante $\Delta(f_i(u))$ in der une wickelten Form zu operieren, da sich dann die ergänzenden Bedingungen Falle nicht analytischer Funktionen besonders prägnant aussprechen lass

Wählt man die Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ auf verschiedene Weisen aus, entstehen dabei unendlich viele verschiedene Determinanten $\Delta(f_i(u$ Doch es ergeben sich dabei, wie man sofort einsieht, nur endlich vi verschiedene Systeme von Bedingungsgleichungen in den ursprünglich Variabeln $x_1, \ldots, x_n$. Betrachten wir z. B. ein System von zwei Fu tionen f_1, f_2. Hängen sie von zwei Variabeln x_1, x_2 ab, so sei et $x_1 = u_0$, $x_2 = u_1$. Dann entsteht

$$\Pi = \frac{\partial}{\partial u_0} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots; \quad \Delta(f_i(u)) = \begin{vmatrix} f_1(u) & f_2(u) \\ \frac{\partial f_1(u)}{\partial u_0} + u_2 \frac{\partial f_1(u)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2(u)}{\partial u_0} + u_2 \frac{\partial f_2(u)}{\partial u_1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f_1(u) & f_2(u) \\ \frac{\partial f_1(u)}{\partial u_0} & \frac{\partial f_2(u)}{\partial u_0} \end{vmatrix} + u_2 \begin{vmatrix} f_1(u) & f_2(u) \\ \frac{\partial f_1(u)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2(u)}{\partial u_1} \end{vmatrix}.$$

erhalten daher als Bedingungsgleichungen

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \end{vmatrix} = 0,$$

. die Wronskischen Determinanten in bezug auf x_1 bzw. x_2 müssen chwinden. Und auf diese Bedingungen kommt man bei jeder Wahl Zahlen c_1, c_2.

Nehmen wir an, daß die Funktionen f_1, f_2 von drei Variabeln x_1, x_2, x_3 ängen. Setzt man dann $x_1 = u_0$, $x_2 = u_1$, $x_3 = u_3$, so kommen wir der auf die Wronskischen Determinanten in bezug auf x_1 bzw. x_2 . x_3, also auf drei Bedingungen. Setzen wir aber $x_1 = u_0$, $x_2 = u_1$, $= u_2$, so erhalten wir für Π: $\Pi = \frac{\partial}{\partial u_0} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_3 \frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots$, oder, n wir lieber u_0, u_1, u_2 wieder durch x_1, x_2, x_3 ersetzen,

$$\Pi = \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Δ entsteht dann

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{vmatrix},$$

daraus, da u_3 eine Unbestimmte ist; die folgenden Bedingungen

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = 0.$$

eichnen wir die Wronskischen Determinanten von f_1, f_2 in bezug auf x_2, x_3 bzw. durch W_1, W_2, W_3, so lauten die letzten Bedingungen

$$W_3 = 0, \qquad W_1 + x_3 W_2 = 0.$$

Setzen wir $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2$, $x_3 = u_3$, so erhalten wir für unseren zeß in den x geschrieben

$$\overline{\Pi} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_4 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

l daraus folgt weiter für Δ

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + u_4 \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + u_4 \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{vmatrix} = x_2 W_1 + x_3 W_2 + u_4 W_3.$$

l so entstehen die Bedingungen

$$x_2 W_1 + x_3 W_2 = 0, \qquad W_3 = 0.$$

Nehmen wir nun an, daß f_1, f_2 von n Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ab hängen, und bezeichnen wir die Wronskischen Determinanten in bezu auf $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bzw. durch $W_1, W_2, \ldots, W_n$, so erhalten wir aus unseren Satz, wenn wir z. B.

$$x_1 = u_1, \quad x_2 = u_3, \quad x_3 = u_5, \ldots$$

setzen, die n Bedingungen

$$W_1 = 0, \quad W_2 = 0, \ldots, \quad W_n = 0. \tag{2}$$

Setzen wir aber z. B.

$$x_1 = u_1, \quad x_2 = u_2, \ldots, \quad x_n = u_n,$$

so entstehen die zwei Bedingungen

$$x_2 W_1 + x_3 W_2 + \ldots + x_n W_{n-1} = 0, \quad W_n = 0. \tag{3}$$

Es ist nicht schwer, aus den Bedingungen (3) die Bedingungen (2 auch direkt abzuleiten, allerdings unter Heranziehung der Integrale de entsprechenden Differentialgleichungen. Man kann z. B. so schließen (wi beschränken uns der Kürze wegen auf analytische Funktionen):

Aus $W_n = 0$ folgt die Darstellung von f_1, f_2 in der Form

$$f_1 = \psi(x_1, \ldots, x_n)\, \varphi_1(x_1, \ldots, x_{n-1}), \quad f_2 = \psi(x_1, \ldots, x_n)\, \varphi_2(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Bezeichnen wir die Wronskischen Determinanten der Funktione $\varphi_1(x_1, \ldots, x_{n-1}), \varphi_2(x_1, \ldots, x_{n-1})$ bzw. durch $W_1', \ldots, W_{n-1}'$, so folg aus der ersten der Gleichungen (3) einer bekannten Eigenschaft de Wronskischen Determinanten ($W_1 = \psi^2 W_1', \ldots, W_{n-1} = \psi^2 W_{n-1}'$) zufolg

$$x_2 W_1' + x_3 W_2' + \ldots + x_n W_{n-1}' = 0.$$

Da hier aber W_i' von x_n unabhängig sind, folgt $W_{n-1}' = 0$, daher auc $W_{n-1} = 0$, und so kann man weiter schließen.

Betrachten wir noch als ein anderes Beispiel den Fall von drei Funk tionen f_1, f_2, f_3 von zwei Variabeln x_1, x_2. Setzen wir $x_1 = u_0$, $x_2 = u_1$ so entstehen aus Δ, wenn man nach Potenzprodukten der Unbestimmte u_2, u_3 entwickelt, fünf Bedingungsgleichungen, nämlich, in leicht ver ständlicher Bezeichnung:

$$1. \begin{pmatrix} \frac{\partial^1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \end{pmatrix} = 0, \quad 2. \; 2\begin{pmatrix} \frac{\partial^1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial^1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \end{pmatrix} = 0, \quad 3. \; \begin{pmatrix} \frac{\partial^1}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$$

und die zwei weiteren, die aus 1. und 2. entstehen, wenn man in ihne die Rollen von x_1 und x_2 vertauscht.

Genau dieselben Bedingungen ergeben sich, wenn man $x_1 = u$ $x_2 = u_1$ setzt. —

Um unsere Behauptungen über Δ zu beweisen, stellen wir vor Allem folgende Tatsache auf:

Es sei Ω ein Gebiet, das in den Definitionsbereichen aller Funk-
en f_i enthalten ist und von der Eigenschaft, daß mit jedem Punkt
Ω auch eine gewisse n-dimensionale Umgebung dieses Punktes in
iegt. Von den Funktionen f_i nehmen wir nur an, daß sie $(m-1)$-mal
erentiierbar sind. Es sei nun Δ identisch gleich 0, solange (x_i) oder,
dasselbe ist, (u_{α_i}) das Gebiet Ω beschreibt, dagegen sei die Determinante

$$\Delta^{(m)} = \begin{vmatrix} f_1(u) & f_2(u) & \dots & f_{m-1}(u) \\ \Pi f_1(u) & \Pi f_2(u) & \dots & \Pi f_{m-1}(u) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Pi^{m-2} f_1(u) & \Pi^{m-2} f_2(u) & & \Pi^{m-2} f_{m-1}(u) \end{vmatrix}$$

keinem Punkte des Gebietes Ω identisch in den neu eingeführten von
u_{α_i} verschiedenen Unbestimmten u_i gleich 0. Dann besteht zwischen
Funktionen $f_i(x)$ eine lineare Relation mit konstanten Koeffizienten,
nicht sämtlich verschwinden:

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_m f_m = 0,$$

l zwar identisch im ganzen Gebiet Ω.

Da $\Delta^{(m)}$ nirgends in Ω verschwindet, so besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{cases} C_1 f_1 + C_2 f_2 + \dots + C_{m-1} f_{m-1} = f_m, \\ C_1 \Pi f_1 + C_2 \Pi f_2 + \dots + C_{m-1} \Pi f_{m-1} = \Pi f_m, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 \Pi^{m-2} f_1 + C_2 \Pi^{m-2} f_2 + \dots + C_{m-1} \Pi^{m-2} f_{m-1} = \Pi^{m-2} f_m \end{cases}$$

jedem Punkte von Ω eine eindeutig bestimmte Lösung

$$C_1(u),\ C_2(u), \dots, C_{m-1}(u).$$

Funktionen $C_i(u)$ sind jedenfalls differentiierbar. In jedem Punkt Ω werden sie zu vollständig bestimmten Funktionen der *neu eingeführten* Unbestimmten u. Aus $\Delta = 0$, $\Delta^{(m)} \neq 0$ folgt weiter

$$C_1 \Pi^{m-1} f_1 + C_2 \Pi^{m-1} f_2 + \dots + C_{m-1} \Pi^{m-1} f_{m-1} = \Pi^{m-1} f_m.$$

Wenden wir nun auf die Gleichungen (4) den Prozeß Π an, so folgt er Benutzung von (4) und (5):

$$\begin{cases} (\Pi C_1) f_1 + (\Pi C_2) f_2 + \dots + (\Pi C_{m-1}) f_{m-1} = 0, \\ (\Pi C_1) \Pi f_1 + (\Pi C_2) \Pi f_2 + \dots + (\Pi C_{m-1}) \Pi f_{m-1} = 0, \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ (\Pi C_1) \Pi^{m-2} f_1 + (\Pi C_2) \Pi^{m-2} f_2 + \dots + (\Pi C_{m-1}) \Pi^{m-2} f_{m-1} = 0. \end{cases}$$

Da aber $\Delta^{(m)}$ in jedem Punkte von Ω von 0 verschieden ist, so folgt hieraus

$$\Pi C_1 = 0,\ \Pi C_2 = 0, \ldots, \Pi C_{m-1} = 0.$$

Hieraus *folgt aber, daß alle C_i konstante Zahlen sind.* Denn es sei etwa u_k eine Variable, deren Index k möglichst groß ist, und von der irgend ein C, etwa C_i wirklich abhängt. Aus der Gleichung

$$\frac{\partial C_i}{\partial u_0} + u_2 \frac{\partial C_i}{\partial u_0} + \ldots + u_{k+1} \frac{\partial C_i}{\partial u_k} = 0$$

folgt aber für $k > 0$, da in ihr u_{k+1} nur im Gliede $u_{k+1} \frac{\partial C_i}{\partial u_k}$ und nur linear vorkommt, daß $\frac{\partial C_i}{\partial u_k} = 0$ ist, entgegen der Annahme. Und wenn $k = 0$ wäre, würde sich ΠC_i nur auf $\frac{\partial C_i}{\partial u_0}$ reduzieren, was wiederum der Annahme widerspricht.

Aus der hiermit bewiesenen Tatsache folgern wir weiter:

Verschwindet Δ in Ω identisch, so gibt es in Ω wenigstens einen Punkt, in dessen Umgebung zwischen den f_i eine lineare Relation mit konstanten nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten besteht.

Ist $m = 1$, so ist die Behauptung selbstverständlich. Wir nehmen sie für alle kleineren m als bewiesen an. Dann können wir annehmen, daß $\Delta^{(m)}$ in Ω nicht identisch verschwindet, da sonst bereits zwischen $f_1, \ldots, f_{m-1}$ eine lineare Relation aufgestellt werden könnte. Dann aber gibt es in Ω wenigstens einen Punkt (x_i^0), in dem $\Delta^{(m)}$ nicht verschwindet. Da $\Delta^{(m)}$ stetig (weil differentiierbar) ist, so ist $\Delta^{(m)}$ auch in einer gewissen Umgebung von (x_i^0) von 0 verschieden, und die vorhin bewiesene Tatsache ist anwendbar.

Sind daher $f_1, \ldots, f_m$ analytische Funktionen, so folgt aus dem identischen Verschwinden von Δ stets die lineare Abhängigkeit der f_i.

Für nicht analytische Funktionen braucht dieser Satz aber nicht unter allen Umständen richtig zu sein, ebenso wie im Falle der Funktionen einer Variabel. Für den Fall einer Variabel sind jedoch von Peano, M. Bôcher und D. R. Curtiss[1]) verschiedene ergänzende Bedingungen aufgestellt, unter denen man aus dem identischen Verschwinden der Wronskischen Determinante in einem Intervall auf die lineare Abhängigkeit der Funktionen in diesem Intervall schließen kann. Viele dieser Bedingungen lassen sich ohne weiteres auch auf unseren Fall übertragen, wenn man nur jede Differentiation durch die Anwendung des Π-Prozesses ersetzt. So gilt z. B. der Satz, daß die Bedingung $\Delta \equiv 0$ hinreichend ist, wenn in keinem Punkt

[1]) Vgl. die Literaturangaben in der Abhandlung von Curtiss, Math. Ann. Bd. 6 (1908), S. 282.

Ω alle m Determinanten $\Delta^{(i)}$ zugleich verschwinden. — Unter $\Delta^{(i)}$ ver-
ien wir eine ganz analog wie Δ, aber für $f_1, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1}, \ldots, f_m$ ge-
iete Determinante. = Über Ω müssen wir dabei voraussetzen, daß mit
m Punkte von Ω auch seine gewisse Umgebung zu Ω gehört und daß
i beliebige Punkte von Ω durch einen Polygonzug mit endlich vielen
en verbunden werden können, dessen sämtliche Punkte wiederum in
iegen.

Daß aber das identische Verschwinden von Δ für die Existenz einer
tischen linearen Relation mit konstanten nicht sämtlich verschwindenden
ffizienten

$$c_1 f_1 + \ldots + c_m f_m = 0$$

wendig ist, ist klar. Denn ist etwa $c_1 \neq 0$, so multiplizieren wir die
e Spalte in Δ mit c_1 und addieren zu ihr die resp. mit $c_2, \ldots, c_m$
tiplizierten weiteren Spalten von Δ. Dann ergibt sich, da Π ein
arer additiver Prozeß ist, daß alle Elemente der ersten Spalte in $c_1 \Delta$
tisch verschwinden. —

Unser Beweis beruht hauptsächlich auf der Eigenschaft des Prozesses Π,
die Anwendung dieses Prozesses auf irgendeine Funktion dann und nur
n identisch 0 ergibt, wenn diese Funktion eine Konstante (in bezug
die Variabeln u_i) ist. — Aus dieser Eigenschaft folgt z. B., daß man
notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine differentiierbare
ktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ eine Konstante ist, in zwei folgenden Bedingungs-
chungen zusammenfassen kann:

$$x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

also mit den Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

ivalent sind. Man kann diese Äquivalenz auch wie folgt direkt zeigen:
wende auf die erste der Gleichungen (7) den Prozeß $\frac{\partial}{\partial x_n}$, auf die
ite den Prozeß

$$x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}$$

subtrahiere die Resultate voneinander. Dann entsteht

$$\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} = 0.$$

wende nun auf diese letzte Gleichung den Prozeß (8) und subtrahiere
der nach x_{n-1} differentiierten ersten Gleichung (7). Dann folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x_{n-2}} = 0.$$

so kann man weiter schließen.

Nun kann man den Prozeß Π auf sehr viele Weisen abändern, daß er die hier für uns in Betracht kommende Eigenschaft behält. Si z. B. $c_1, c_2, c_3, \ldots$ unendlich viele von 0 verschiedene Konstanten, so h auch der Prozeß

$$c_1 u_1 \frac{\partial}{\partial u_0} + c_2 u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} + c_3 u_3 \frac{\partial}{\partial u_2} + \cdots \tag{9}$$

die Eigenschaft, daß seine Anwendung auf irgendeine Funktion dann u nur dann 0 ergibt, wenn diese Funktion konstant in bezug auf die u Und dieselbe Eigenschaft besitzt der allgemeinere Prozeß:

$$\varphi_1(u_1)\frac{\partial}{\partial u_0} + \varphi_2(u_2)\frac{\partial}{\partial u_1} + \varphi_3(u_3)\frac{\partial}{\partial u_2} + \cdots, \tag{10}$$

wo $\varphi_1(u_1)$, $\varphi_2(u_2), \ldots$ beliebige hinreichend oft differentiierbare Funktion sind, von denen keine in irgendeinem Intervall konstant ist. Daher könn wir in unserer Determinante Δ den Prozeß Π durch irgendeinen Pro von der Form (9) oder allgemeiner von der Form (10) ersetzen, u unsere Sätze bleiben, wie eine kleine Modifikation des Beweises ze gültig. So können wir durch geeignete Wahl der Funktionen $\varphi(u)$ unse Bedingungen immer neue und neue Formen geben.

Zum Schlusse sei noch kurz erwähnt, daß unsere obige Bemerk über die Äquivalenz der Bedingungen (7) und (7′) dazu angewandt wer kann, die Bedingungen für den Rang der Funktionalmatrix in eine klein Anzahl von Bedingungen zusammenzufassen. Es seien z. B. $\varphi(x_1, \ldots, x$ $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ zwei differentiierbare Funktionen und es sei z. B. wenigst eine der Ableitungen $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$ in der Umgebung eines Punktes P vo verschieden. Dann lassen sich die Bedingungen dafür, daß der Rang Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \ldots, & \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, & \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \ldots, & \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

in der Umgebung von F gleich 1 ist, einfach wie folgt schreiben:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0, \quad x_3 \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \end{vmatrix} + x_4 \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \end{vmatrix} + \cdots + x_n \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_{n-1}} \end{vmatrix} =$$

Und ganz analog lassen sich die Bedingungen im Falle beliebig v Funktionen und beliebigen Ranges zusammenfassen.

(Eingegangen am 24. Dezember 1918.)

Über eine spezielle Klasse von Regelflächen.

Von

Oskar Perron in Heidelberg.

§ 1.

Problemstellung und Resultate.

Bekanntlich hat von allen Regelflächen nur die gemeine Schraubenche die Eigenschaft, eine Kurvenschar zu enthalten, deren Hauptnormalen die Geraden der Fläche sind[1]). Dieser Satz ist die Antwort auf n Problem, das ich im folgenden dahin verallgemeinern will, daß alle egelflächen gesucht werden, die eine Kurvenschar enthalten, deren Tanenten, Haupt- und Binormalen mit den Geraden der Fläche gegebene onstante Winkel α, β, γ bilden. Es soll also längs jeder Kurve der char das begleitende Dreikant eine konstante Lage gegen die durch den etreffenden Kurvenpunkt gehende Gerade der Fläche haben, und zwar r jede Kurve der Schar die gleiche Lage. Zwischen den gegebenen Winkeln α, β, γ muß natürlich die Beziehung

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{1}$$

atthaben. Außerdem muß naturgemäß $\sin\alpha \neq 0$ sein, da eine Kurvenchar die Geraden nicht berühren, sondern nur unter endlichem Winkel chneiden kann.

Der Fall $\beta = 0^0$, also $\alpha = 90^0$, $\gamma = 90^0$ führt zu der obenerwähnten chraubenfläche. Diese nimmt insofern eine ganz besondere Ausnahmetellung ein, als bei jedem andern Wertsystem α, β, γ sich das überaschende Resultat ergeben wird, daß *windschiefe Regelflächen der gesuchten Art überhaupt nicht existieren*; wohl aber gibt es abwickelbare, nd zwar sind die gesuchten Flächen identisch mit den sogenannten

[1]) Vgl. Bertrand, Mémoire sur la théorie des courbes à double courbure, ournal de mathématiques pures et appliquées 15 (1850), S. 332–350.

Böschungsflächen, d. h. abwickelbaren Flächen, deren Geraden mit eine festen Ebene einen konstanten Winkel λ bilden. Dabei ist

$$\text{tang}\,\lambda = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha\cos\beta}, \tag{2}$$

und *jede* Böschungsfläche, deren Böschungswinkel λ der hierdurch gegeben ist, löst unsere Aufgabe. Speziell für $\gamma = 90^0$ muß $\cos\beta \neq 0$ sein (we nach (1) sonst $\sin\alpha = 0$ wäre), es ist also $\lambda = 0^0$. In diesem Fall existier somit keine Lösung außer der Ebene, aufgefaßt als Träger einer Sch von Geraden. Diese Lösung ist aber trivial; die isogonalen Trajektorie gehören ja der Ebene an, und ihre Binormalen stehen natürlich senkrec darauf. Für $\cos\beta = 0$ ist $\lambda = 90^0$, und die Fläche daher ein Zylinde

Es wird sich weiter zeigen, daß auf einer Böschungsfläche nicht nu *eine* Kurvenschar der gesuchten Art existiert, sondern unendlich viel *Jede* Schar isogonaler Trajektorien hat nämlich die Eigenschaft, daß auc ihre Haupt- und Binormalen mit den Geraden der Fläche konstante Winkl bilden. Und zwar ergeben sich für eine Fläche mit dem Böschungswinkel zu jedem Wert des Winkels α die zugehörigen Werte für β und γ ste aus den Gleichungen (1) und (2).

Die fraglichen Kurven auf der Fläche bilden mit der festen Ebe ebenfalls einen konstanten Winkel μ, sind also *allgemeine Schraube linien*. Dabei ist

$$\text{tang}\,\mu = \frac{\cos\alpha\cos\gamma}{\sin^2\alpha} \tag{3}$$

Denkt man sich mit der Kurve ein Fünfkant verbunden, bestehend a „Tangente, Hauptnormale, Binormale, Gerade der Fläche und der Sen rechten zu der erwähnten festen Ebene", so ist dieses Fünfkant län jeder Kurve konstant. Von den mannigfachen Winkelbeziehungen dies Fünfkants, die aus den Gleichungen (1), (2), (3) fließen, verdient d folgende Erwähnung:

$$\sin\mu = \cos\alpha\,\sin\lambda. \tag{4}$$

Diese besagt nach den Grundformeln des rechtwinkligen sphärischen Dre ecks, daß bei dem Dreikant aus „Tangente, Senkrechte zur festen Ebe und Gerade der Fläche" der Flächenwinkel an der Geraden der Fläc ein rechter ist. Die Fläche kann daher auch dadurch erzeugt werde daß ein derartiges Dreikant sich an einer allgemeinen Schraubenlinie entlang bewegt, daß die eine Kante die Schraubenlinie berührt, währe die zweite zu sich selbst parallel bleibt; die dritte beschreibt dann d Fläche.

Die bei unserem Problem auftretenden Schraubenlinien unterlieg keiner Einschränkung. Man kann also bei der eben erwähnten Erzeugu

nserer Flächen von einer *beliebigen* Schraubenlinie ausgehen; dazu ge-ören auch die ebenen Kurven ($\mu = 0$). Eine weitere Folgerung ist die, aß durch jede allgemeine Schraubenlinie (charakterisiert durch den Stei-ungswinkel μ) sich ∞^1 abwickelbare Flächen legen lassen, deren Geraden egen das begleitende Dreikant der Schraubenlinie konstante Lage haben. ieser Satz wurde kürzlich auch von Herrn Voß gefunden[2]). Wir sehen er weiter, daß die betreffenden Flächen sämtlich Böschungsflächen sind; r den Böschungswinkel λ sind ∞^1 Werte möglich, und zu jedem Wert λ geben sich die zugehörigen Winkel α, γ, β der Reihe nach aus den leichungen (4), (3), (2).

Das Problem wäre verhältnismäßig einfach zu lösen, wenn ich die ragestellung von vornherein auf abwickelbare Flächen beschränkt hätte. enn die isogonalen Trajektorien einer solchen ergeben sich bekanntlich is einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung[3]), sind also be-annt. Bei den *allgemeinen* Regelflächen führt aber nur das Problem er *orthogonalen* Trajektorien auf eine lineare Differentialgleichung erster rdnung[4]). Die Differentialgleichung der allgemeinen isogonalen Trajek-orien dagegen scheint in der Literatur noch nicht integriert zu sein. Im olgenden geschieht die Integration, indem das allgemeine Integral in eine eihe entwickelt wird, die nach fallenden Potenzen der Integrationskon-tanten C fortschreitet, beginnend mit der Potenz C^1, wobei die einzelnen eihenglieder sich aus linearen Differentialgleichungen erster Ordnung rgeben[5]).

Erst nachdem diese Form des allgemeinen Integrals gefunden ist, önnen die Differentialgleichungen des Problems aufgestellt werden. Ihre ntegration zerfällt in zwei Schritte, deren erster in § 3 und § 4 erledigt ird. Alsdann vereinfachen sich die Differentialgleichungen soweit, daß s ziemlich leicht ist, die Böschungsflächen und in dem Ausnahmefall $\beta = 0$

---

[2]) A. Voß, Zur Theorie der Kurven im Raume, Sitzungsberichte der k. bayr. kademie der Wissenschaften, Math. Phys. Klasse 1918, S. 283—354, speziell S. 292.

[3]) Zuerst von Molins auf umständlichem Weg gefunden, Sur les trajectoires ui coupent sous un angle donné les tangentes à une courbe à double courbure. ournal de mathématiques pures et appliquées 8 (1843), S. 132—144. Einfacher bei Beltrami, Sulla teoria delle sviluppoidi e delle sviluppanti, Annali di matematica ura ed applicata 4 (1861), S. 257—283, sowie bei Combescure, Sur quelques pro-lèmes relatifs aux surfaces réglées, Journal für die reine und angewandte Mathe-natik 62 (1863), S. 174—187.

[4]) Vgl. Combescure a. a. O.[3]).

[5]) Allerdings sind auch andere Entwicklungen möglich, die vielleicht näher iegen, z. B. einfach nach (steigenden oder fallenden) Potenzen von C, beginnend mit inem von C freien Glied. Eine solche Entwicklung wäre aber, soviel ich sehe, für nser Problem ohne Nutzen.

die gemeine Schraubenfläche als Lösung zu erkennen. Schwieriger gestalte sich der Nachweis, daß das die *einzigen* Lösungen sind.

§ 2.

Die isogonalen Trajektorien der allgemeinen Regelflächen.

Die Gleichungen einer Regelfläche können mit zwei Parametern u, v in der Form angenommen werden:

$$\left\{\begin{aligned} x &= f_1(u) + v g_1(u), \\ y &= f_2(u) + v g_2(u), \\ z &= f_3(u) + v g_3(u); \end{aligned}\right. \tag{5}$$

dann sind die Kurven $u = \text{const.}$ die Geraden der Fläche.

Die Funktionen $f_\nu(u)$, $g_\nu(u)$ mögen in einem gewissen Intervall

$$a \leqq u \leqq b \tag{6}$$

definiert, reellwertig und zweimal stetig differenzierbar sein. Die Funktionen g_1, g_2, g_3 sollen für keinen Wert von u alle drei zugleich verschwinden; es wird also $g_1^2 + g_2^2 + g_3^2$ oberhalb einer positiven Schranke bleiben.

Die Fläche ist abwickelbar oder windschief, je nachdem die Determinante

$$\begin{vmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1' & g_2' & g_3' \\ f_1' & f_2' & f_3' \end{vmatrix} \tag{7}$$

identisch verschwindet oder nicht. Die Akzente bedeuten dabei Differentiation nach u. Bei nicht identischem Verschwinden soll das Intervall (6) so bemessen sein, daß die Determinante *nirgends* verschwindet.

Wenn bereits die zweireihigen Unterdeterminanten identisch Null sind, fallen alle Geraden in eine zusammen, und die Gleichungen (5) stellen keine Fläche, sondern nur eine Gerade dar, was wir natürlich ausschließen.

Die Richtungskosinus einer Geraden der Regelschar verhalten sich wie

$$g_1 : g_2 : g_3.$$

Die Richtungskosinus der Tangente einer Flächenkurve mit der Gleichung $v = \varphi(u)$ verhalten sich wie

$$f_1' + (\varphi g_1)' : f_2' + (\varphi g_2)' : f_3' + (\varphi g_3)'.$$

Ist also die Kurve $v = \varphi(u)$ eine isogonale Trajektorie, welche die Ge

den der Fläche unter dem Winkel α schneidet, so erhält man zur Bestimmung von $\varphi(u)$ die Differentialgleichung

$$\Big[\sum_{\nu=1}^{3} g_\nu (f_\nu' + (\varphi g_\nu)')\Big]^2 = \cos^2\alpha \cdot \sum_{\nu=1}^{3} g_\nu^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{3} (f_\nu' + (\varphi g_\nu)')^2 .$$

tzt man zur Abkürzung

$$\left\{\begin{array}{lll} \sum_{\nu=1}^{3} g_\nu^2 = P_1, & \sum_{\nu=1}^{3} g_\nu g_\nu' = P_2, & \sum_{\nu=1}^{3} g_\nu f_\nu' = P_3, \\ \sum_{\nu=1}^{3} g_\nu'^2 = P_4, & \sum_{\nu=1}^{3} g_\nu' f_\nu' = P_5, & \sum_{\nu=1}^{3} f_\nu'^2 = P_6, \end{array}\right.$$

bleibt P_1 nach unseren Voraussetzungen oberhalb einer positiven Schranke, d die Differentialgleichung schreibt sich folgendermaßen:

$$(P_1\varphi' + P_2\varphi + P_3)^2 = \cos^2\alpha \cdot P_1 (P_1\varphi'^2 + 2P_2\varphi\varphi' + 2P_3\varphi' + P_4\varphi^2 + 2P_5\varphi + P_6);$$

er auch, wenn man beiderseits den Ausdruck

$$(P_1\varphi' + P_2\varphi + P_3)^2 \cos^2\alpha$$

btrahiert und alsdann die Gleichung durch $\sin^2\alpha$ dividiert:

$$(P_1\varphi' + P_2\varphi + P_3)^2 = \operatorname{cotg}^2\alpha \cdot (Q_1\varphi^2 + 2Q_2\varphi + Q_3),$$

obei unter Berücksichtigung von (8) und bekannten Determinantenregeln

$$Q_1 = P_1 P_4 - P_2^2 = \left\| \begin{array}{ccc} g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1' & g_2' & g_3' \end{array} \right\|^2,$$

$$Q_2 = P_1 P_5 - P_2 P_3 = \left\| \begin{array}{ccc} g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1' & g_2' & g_3' \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{ccc} g_1 & g_2 & g_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \end{array} \right\|,$$

$$Q_3 = P_1 P_6 - P_3^2 = \left\| \begin{array}{ccc} g_1 & g_2 & g_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \end{array} \right\|^2$$

. Hieraus folgt leicht

$$Q_1 Q_3 - Q_2^2 = P_1 \cdot \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ P_2 & P_4 & P_5 \\ P_3 & P_5 & P_6 \end{vmatrix} = P_1 \cdot \begin{vmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1' & g_2' & g_3' \\ f_1' & f_2' & f_3' \end{vmatrix}^2 .$$

Für die *orthogonalen* Trajektorien ist $\operatorname{cotg}\alpha = 0$; die Differentialeichung (9) reduziert sich also auf eine lineare. Diesen Fall schließen r vorläufig von der weiteren Betrachtung aus. Wenn die Determinanten r Matrix

$$\left\| \begin{array}{ccc} g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1' & g_2' & g_3' \end{array} \right\|$$

alle drei verschwinden, sind die g_ν' proportional zu den g_ν, also die Verhältnisse $g_1 : g_2 : g_3$ konstant, und die Fläche ein Zylinder. Auch von diesem einfachen Fall wollen wir zunächst absehen. Dann ist nach (10) Q_1 nicht identisch Null, und wir wollen das Intervall (6) so bemessen denken, daß Q_1 nirgends verschwindet und folglich oberhalb einer positiven Schranke bleibt.

Wenn die Regelfläche windschief ist, also nach unseren Voraussetzungen die Determinante (7) nirgends verschwindet, ist nach (13) auch $Q_1 Q_3 - Q_2^2$ positiv und bleibt somit oberhalb einer positiven Schranke. Daher ist die quadratische Funktion von φ auf der rechten Seite der Gleichung (9) positiv definit und bleibt für alle u des Intervalles (6) und für alle φ oberhalb einer positiven Schranke. Die Differentialgleichung (9) reduziert sich daher auf die folgenden beiden:

$$(9a) \qquad P_1 \varphi' + P_2 \varphi + P_3 = \operatorname{cotg} \alpha \cdot \sqrt{Q_1 \varphi^2 + 2 Q_2 \varphi + Q_3},$$

$$(9b) \qquad P_1 \varphi' + P_2 \varphi + P_3 = -\operatorname{cotg} \alpha \cdot \sqrt{Q_1 \varphi^2 + 2 Q_2 \varphi + Q_3}.$$

Das mag selbstverständlich erscheinen, ergibt sich aber einwandfrei erst aus dem Satz 2 einer früheren Arbeit[6]) von mir, und zwar gerade auf Grund der Tatsache, daß der Radikand oberhalb einer positiven Schranke bleibt; denn die Differentialgleichung hat infolgedessen keine singulären Linienelemente.

Im Fall der abwickelbaren Fläche ist $Q_1 Q_3 - Q_2^2$ nach (13) identisch Null, so daß auf der rechten Seite der Gleichung (9) das Quadrat einer linearen Funktion von φ steht. Nach Satz 2 meiner erwähnten Arbeit sind auch dann die Integrale von (9) durch die Integrale von (9a) und (9b) erschöpft, sofern wir für φ einen Anfangswert festlegen, für welchen die rechte Seite nicht verschwindet, d. h. geometrisch gesprochen, wenn wir die Nähe der Gratlinie meiden. Die Wurzel läßt sich dann ausziehen und die Gleichungen (9a), (9b) sind lineare. Ob auch für die eben ausgeschlossenen Anfangswerte von φ das gleiche gilt, kann hier unerörtert bleiben.

Von den Gleichungen (9a), (9b) braucht in allen Fällen nur die erste behandelt zu werden, da die zweite aus ihr hervorgeht, indem man α durch $-\alpha$ ersetzt.

Die Gleichung (9) oder (9a) versuchen wir jetzt durch den Ansatz

$$(14) \qquad \varphi = C \cdot \left(\omega_0 + \frac{\omega_1}{C} + \frac{\omega_2}{C^2} + \cdots \right),$$

$$(15) \qquad \varphi' = C \cdot \left(\omega_0' + \frac{\omega_1'}{C} + \frac{\omega_2'}{C^2} + \cdots \right),$$

[6]) Über Differentialgleichungen erster Ordnung, die nicht nach der Ableitung aufgelöst sind, Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung 22 (1913) S. 356–368.

o C eine willkürliche Konstante ist, zu integrieren. Setzt man diese usdrücke in (9) ein und entwickelt beide Seiten nach fallenden Potenzen on C, so erhält man durch Koeffizientenvergleichung aus den Gliedern it C^2:

$$(P_1\omega_0' + P_2\omega_0)^2 = \operatorname{cotg}^2\alpha \cdot Q_1\omega_0^2; \tag{16}$$

dann aus den Gliedern mit C:

$$2(P_1\omega_0 + P_2\omega_0)(P_1\omega_1' + P_2\omega_1 + P_3) = \operatorname{cotg}^2\alpha \cdot (2Q_1\omega_0\omega_1 + 2Q_2\omega_0), \tag{17}$$

nd aus den von C freien Gliedern.

$$\left\{\begin{array}{l} 2(P_1\omega_0' + P_2\omega_0)(P_1\omega_2' + P_2\omega_2) + (P_1\omega_1' + P_2\omega_1 + P_3)^2 \\ \quad = \operatorname{cotg}^2\alpha \cdot [Q_1(2\omega_0\omega_2 + \omega_1^2) + 2Q_2\omega_1 + Q_3]. \end{array}\right. \tag{18}$$

ndlich liefern die Glieder mit C^{2-n} für $n \geqq 3$ allgemein die Formel:

$$\left\{\begin{array}{l} 2(P_1\omega_0' + P_2\omega_0)(P_1\omega_n' + P_2\omega_n) \\ \quad + \sum_{\lambda=1}^{n-1}(P_1\omega_\lambda' + P_2\omega_\lambda)(P_1\omega_{n-\lambda}' + P_2\omega_{n-\lambda}) \\ \quad + 2P_3(P_1\omega_{n-1}' + P_2\omega_{n-1}) \\ \quad = \operatorname{cotg}^2\alpha \cdot [Q_1(2\omega_0\omega_n + \sum_{\lambda=1}^{n-1}\omega_\lambda\omega_{n-\lambda}) + 2Q_2\omega_{n-1}]. \end{array}\right. \tag{19}$$

In Gleichung (16) läßt sich die Wurzel ziehen, und zwar ergibt sich, a wir uns auf den Fall der Gleichung (9a) beschränken wollten:

$$P_1\omega_0' + P_2\omega_0 = \operatorname{cotg}\alpha \cdot \sqrt{Q_1}\,\omega_0, \tag{20}$$

o ω_0 positiv sein muß. Sei nun ω_0 ein durchweg positives Integral eser Differentialgleichung; ein solches gibt es, weil sie linear und homogen t. Da wir $\operatorname{cotg}\alpha \neq 0$ vorausgesetzt haben, da außerdem P_1 oberhalb ner positiven Schranke bleibt, lassen sich die Gleichungen (17), (18), 9) durch (20) und durch $2P_1$ dividieren, wodurch sie übergehen in:

$$\omega_1' + \frac{P_2 - \operatorname{cotg}\alpha \cdot \sqrt{Q_1}}{P_1}\omega_1 = \operatorname{cotg}\alpha \cdot \frac{Q_2}{P_1\sqrt{Q_1}} - \frac{P_3}{P_1}, \tag{17a}$$

$$\omega_2' + \frac{P_2 - \operatorname{cotg}\alpha \cdot \sqrt{Q_1}}{P_1}\omega_2 = \operatorname{cotg}\alpha \cdot \frac{Q_1\omega_1^2 + 2Q_2\omega_1 + Q_3}{2P_1\sqrt{Q_1}\,\omega_0} - \frac{(P_1\omega_1' + P_2\omega_1 + P_3)^2}{2P_1\sqrt{Q_1}\,\omega_0\operatorname{cotg}\alpha}, \tag{18a}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \omega_n' + \dfrac{P_2 - \operatorname{cotg}\alpha \cdot \sqrt{Q_1}}{P_1}\omega_n = \operatorname{cotg}\alpha \cdot \dfrac{Q_1\sum_{\lambda=1}^{n-1}\omega_\lambda\omega_{n-\lambda} + 2Q_2\omega_{n-1}}{2P_1\sqrt{Q_1}\,\omega_0} \\ \quad - \dfrac{\sum_{\lambda=1}^{n-1}(P_1\omega_\lambda + P_2\omega_\lambda)(P_1\omega_{n-\lambda}' - P_2\omega_{n-\lambda}) + 2P_3(P_1\omega_{n-1}' + P_2\omega_{n-1})}{2P_1\sqrt{Q_1}\,\omega_0\operatorname{cotg}\alpha} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{für } n \geqq 3). \end{array}\right. \tag{19a}$$

Die Gleichung (17a) ist eine lineare Differentialgleichung für die Funktion ω_1; wir wollen sie mit der Anfangsbedingung $\omega_1 = 0$ für $u = a$ integrieren. Ebenso integrieren wir die lineare Differentialgleichung (18a) mit der Anfangsbedingung $\omega_2 = 0$ für $u = a$. Allgemein ist (19a), nachdem $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ bereits bekannt sind, eine lineare Differentialgleichung für ω_n, die wir wieder mit der Anfangsbedingung $\omega_n = 0$ für $u = a$ integrieren wollen.

Nun handelt es sich um die Konvergenz der Reihen (14) und (15), wenn darin $\omega_0, \omega_1, \ldots$ die soeben berechneten Funktionen sind. Bedeutet M_λ das Maximum von $|\omega_\lambda| + |\omega_\lambda'|$ im Intervall (6), so ist die rechte Seite der Gleichung (19a) absolut kleiner als

$$G\Big(\sum_{\lambda=1}^{n-1} M_\lambda M_{n-\lambda} + M_{n-1}\Big),$$

wo G eine Konstante bedeutet (unabhängig von u und n). Aus der bekannten Form des Integrals der linearen Differentialgleichung (19a) unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $\omega_n(a) = 0$ folgt dann weiter auch

$$\left.\begin{aligned} |\omega_n| &< K\Big(\sum_{\lambda=1}^{n-1} M_\lambda M_{n-\lambda} + M_{n-1}\Big) \\ |\omega_n'| &< K\Big(\sum_{\lambda=1}^{n-1} M_\lambda M_{n-\lambda} + M_{n-1}\Big) \end{aligned}\right\} \quad \text{für } n \geqq 3$$

wo K ebenfalls eine Konstante ist. Daher gewiß auch:

$$M_n < 2K\Big(\sum_{\lambda=1}^{n-1} M_\lambda M_{n-\lambda} + M_{n-1}\Big) \qquad \text{für } n \geqq 3 \tag{21}$$

Nun sei A eine Zahl, für welche die Ungleichungen

$$A > M_1 \tag{22}$$

$$2K(A^2 + A) + \tfrac{1}{2}K > M_2 \tag{23}$$

gelten. Setzt man dann

$$y = \frac{1 - 2Kx - \sqrt{1 - 4K(2A+1)x}}{4K} = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots, \tag{24}$$

so ist

$$(4Ky - 1 + 2Kx)^2 = 1 - 4K(2A+1)x,$$

oder etwas anders geschrieben:

$$y = 2K(y^2 + xy) + \tfrac{1}{2}Kx^2 + Ax. \tag{25}$$

Führt man hier für y die Reihe (24) ein und entwickelt nach Potenzen von x, so ergibt sich durch Koeffizientenvergleichung:

26) $$A_1 = A,$$

27) $$A_2 = 2K(A_1^2 + A_1) + \tfrac{1}{2}K = 2K(A^2 + A) + \tfrac{1}{2}K,$$

28) $$A_n = 2K\Big(\sum_{\lambda=1}^{n-1} A_\lambda A_{n-\lambda} + A_{n-1}\Big) \qquad \text{für } n \geqq 3.$$

Daraus folgt aber für alle n

29) $$M_n < A_n.$$

In der Tat für $n = 1$ ergibt sich das sofort aus (22) und (26), für $n = 2$ aus (23) und (27). Nimmt man aber bei beliebigem $n (\geqq 3)$ an, die Ungleichung (29) sei für kleinere Werte von n bereits als richtig erkannt, so folgt aus (21) und (28)

$$M_n < 2K\Big(\sum_{\lambda=1}^{n-1} A_\lambda A_{n-\lambda} + A_{n-1}\Big) = A_n,$$

womit sie allgemein bewiesen ist. Nach der Bedeutung der Zahl M_n wird nach (29) erst recht

30) $$|\omega_n| < A_n, \qquad |\omega_n'| < A_n$$

sein, und da die Reihe (24) für $\left|\frac{1}{x}\right| < 4K(2A + 1)$ konvergiert, sind auch die Reihen (14) und (15) für $|C| > 4K(2A + 1)$ konvergent, und zwar gleichmäßig im Intervall $a \leqq u \leqq b$. Außerdem ist die Reihe (15), eben wegen ihrer gleichmäßigen Konvergenz, die Ableitung der Reihe (14).

Somit erweisen sich unsere formalen Operationen nachträglich als berechtigt, und die Reihe (14) stellt für hinreichend große Werte von $|C|$ ein Integral der Differentialgleichung (9a) dar; C ist die Integrationskonstante. Die Gleichungen der isogonalen Trajektorien lauten hiernach, indem man $v = \varphi(u)$ in (5) einsetzt:

31)
$$\begin{cases} x = f_1(u) + C g_1(u)\left(\omega_0(u) + \dfrac{\omega_1(u)}{C} + \dfrac{\omega_2(u)}{C^2} + \cdots\right), \\ y = f_2(u) + C g_2(u)\left(\omega_0(u) + \dfrac{\omega_1(u)}{C} + \dfrac{\omega_2(u)}{C^2} + \cdots\right), \\ z = f_3(u) + C g_3(u)\left(\omega_0(u) + \dfrac{\omega_1(u)}{C} + \dfrac{\omega_2(u)}{C^2} + \cdots\right). \end{cases}$$

Für später ist wichtig zu bemerken, daß auch die Reihe (15) für genügend große Werte von $|C|$ nochmals gliedweise differenziert werden darf. Da die Funktionen f_ν, g_ν zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt wurden, sind die P_ν, Q_ν noch mindestens einmal stetig differenzierbar, und aus der Gleichung (20) folgt dann, daß auch ω_0 zweimal stetig differenzierbar ist. Das gleiche ergibt sich für die andern Funktionen ω_n

aus den Gleichungen (17a) bis (19a). Dabei läßt sich durch Differen-
tiation der Gleichung (19a) mit Rücksicht auf (30) sogleich eine Ab-
schätzung der Form gewinnen:

$$|\omega_n''| < G_1\Big(A_n + A_{n-1} + \sum_{\lambda=1}^{n-1} A_\lambda A_{n-\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{n-1} |\omega_\lambda''\ A_{n-\lambda} + |\omega_{n-1}''|\Big),$$

wo G_1 eine Konstante ist. Hieraus folgt aber

$$|\omega_n''| < H^n A_n, \tag{32}$$

wenn H eine genügend große Konstante bedeutet. In der Tat, wenn da
für kleinere Indizes ($\geqq 1$) gilt, so folgt:

$$|\omega_n''| < G_1\Big(A_n + A_{n-1} + \sum_{\lambda=1}^{n-1} A_\lambda A_{n-\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{n-1} H^{n-1} A_\lambda A_{n-\lambda} + H^{n-1} A_{n-1}$$

$$= G_1 A_n + G_1(1 + H^{n-1})\Big(\sum_{\lambda=1}^{n-1} A_\lambda A_{n-\lambda} + A_{n-1}\Big)$$

$$= G_1 A_n + \frac{G_1}{2K}(1 + H^{n-1}) A_n < H^n A_n,$$

wenn nur H groß genug ist.

Aus der damit bewiesenen Ungleichung (32) folgt, daß fü
$|C| > 4HK(2A + 1)$ die Reihe

$$\omega_0'' + \frac{\omega_1''}{C} + \frac{\omega_2''}{C^2} + \dots$$

im Intervall $a \leqq u \leqq b$ gleichmäßig konvergiert, so daß die Reihe (15)
der Tat gliedweise differenziert werden darf.

Wir haben bisher den Fall orthogonaler Trajektorien ausgeschlosse
Dann lautet aber die Differentialgleichung (9) einfach:

$$P_1 \varphi' + P_2 \varphi + P_3 = 0,$$

und ihr allgemeines Integral hat die Form

$$\varphi = C\omega_0(u) + \omega_1(u),$$

so daß dieser Fall sich nachträglich doch den Gleichungen (31) subsumie
es ist einfach $\omega_n = 0$ für $n \geqq 2$.

Weiter hatten wir den Fall des Zylinders ausgeschlossen, in welche
die Determinanten der Matrix

$$\begin{Vmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1' & g_2' & g_3' \end{Vmatrix}$$

identisch verschwinden. Nach (10) und (11) sind dann auch Q_1 und

entisch Null. Dagegen ist Q_3 nach (12) nicht identisch Null. Denn nst wären nicht nur die g_ν', sondern auch die f_ν' proportional zu den g_ν, daß die Unterdeterminanten der Determinante (7) alle verschwinden ürden, was wir ausgeschlossen haben, weil die Gleichungen (5) dann ine Fläche darstellen. Wir wollen daher das Intervall (6) so bemessen nken, daß Q_3 nirgends verschwindet und folglich oberhalb einer positiven hranke bleibt.

Dann besagt aber die Differentialgleichung (9) soviel wie die beiden lgenden:

$$P_1\varphi' + P_2\varphi + P_3 = \operatorname{cotg}\alpha\cdot\sqrt{Q_3},$$

$$P_1\varphi' + P_2\varphi + P_3 = -\operatorname{cotg}\alpha\cdot\sqrt{Q_3},$$

d wir können uns wieder auf die erste beschränken. Diese ist aber near, und ihr allgemeines Integral hat die Form

$$\varphi = C\,\omega_0(u) + \omega_1(u),$$

daß auch dieser Fall nachträglich sich als in den Formeln (31) enthalten weist: Diese gelten also ausnahmslos.

Übrigens gibt es noch einen weiteren Fall, in dem sich das Integral auf $C\,\omega_0 + \omega_1$ reduziert, nämlich wenn $Q_1 Q_3 - Q_2^2 = 0$, die Fläche so abwickelbar ist. In der Tat reduziert sich in diesem Fall die rechte ite der Gleichung (18a) infolge von (17a) auf

$$\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{2P_1\sqrt{Q_1}\,\omega_0}\left(Q_3 - \frac{Q_2^2}{Q_1}\right) = 0.$$

as Integral von (18a) mit der Anfangsbedingung $\omega_2(a) = 0$ ist also nfach $\omega_2 = 0$. Nimmt man aber an, $\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{n-1}$ seien bereits s identisch verschwindend erkannt, so ist die rechte Seite der Gleichung 9a) gleich Null, und durch Integration ergibt sich $\omega_n = 0$. Daher reduziert sich in der Tat das allgemeine Integral (10) wieder auf $C\,\omega_0 + \omega_1$.

Weitere Fälle, in denen das eintritt, gibt es aber nicht. Denn wenn as allgemeine Integral diese Form hat, muß die Differentialgleichung 9a) bekanntlich eine lineare sein, und das tritt offenbar nur in den angegebenen Fällen ein.

Will man die Gleichungen einer Regelfläche mit zwei Parametern u, v erart darstellen, daß die Linien $u = \text{const.}$ die Geraden der Fläche, die inien $v = \text{const.}$ eine Schar isogonaler Trajektorien sind, so wird an nach dem Bewiesenen die Gleichungen stets in der Form (31) anehmen können, wobei nur v an Stelle von C zu schreiben ist. Wir ollen aber die Bezeichnung etwas ändern, indem wir statt

$$g_\nu\,\omega_0, \qquad f_\nu + g_\nu\,\omega_1, \qquad \frac{\omega_n}{\omega_0}$$

einfacher schreiben

$$g_\nu, \qquad f_\nu, \qquad \omega_n.$$

Dann ergibt sich die folgende definitive Gestalt:

$$(33) \qquad \begin{cases} x = f_1(u) + v g_1(u)\varphi(u, v), \\ y = f_2(u) + v g_2(u)\varphi(u, v), \\ z = f_3(u) + v g_3(u)\varphi(u, v), \end{cases}$$

wobei

$$(34) \qquad \varphi(u, v) = 1 + \frac{\omega_2(u)}{v^2} + \frac{\omega_3(u)}{v^3} + \cdots.$$

Die neuen Funktionen f_ν, g_ν sind ebenfalls für $a \leqq u \leqq b$ zweim stetig differenzierbar. Die Reihe $\varphi(u, v)$ konvergiert für hinreiche große Werte von v gleichmäßig im Intervall $a \leqq u \leqq b$ und ist gliedwei zweimal stetig nach u differenzierbar; die durch Differentiation entstehend Reihen konvergieren ebenfalls gleichmäßig. Die Funktionen $\omega_n(u)$ hab für $u = a$ alle den Wert Null, so daß $\varphi(a, v) = 1$ ist[7]). Für variables aber reduziert sich die Reihe $\varphi(u, v)$ dann und nur dann auf ihr erst Glied 1, wenn es sich um *orthogonale* Trajektorien handelt, oder we die Fläche abwickelbar ist (Zylinder eingeschlossen).

§ 3.

Die Differentialgleichungen für die Funktionen $g_\nu(u)$ und ihre Integration.

Wir suchen jetzt eine Kurvenschar, deren Tangenten mit den Gerad der Fläche den konstanten Winkel α, und deren Binormalen mit d Geraden der Fläche den konstanten Winkel γ bilden. Die Hauptnormal bilden dann ganz von selbst mit den Geraden der Fläche den konstant Winkel β, wo

$$(35) \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

ist. Sind $u = \text{const.}$ die Geraden der Fläche, $v = \text{const.}$ die fraglich

---

[7]) Die Annahme $\omega_n(a) = 0$ ist die einfachste, die sich auch für später empfiel Sie ist aber nicht etwa notwendig. Vielmehr hätte man bei dem Beweis ebenso willkürliche Anfangswerte $\omega_n(a) = c_n$ festsetzen können, wobei das Wort „willkürli so zu verstehen ist, daß die c_n an keine Bedingungs*gleichungen* geknüpft sind, w aber an Konvergenz erzwingende *Ungleichungen*. Es läuft das darauf hinaus, man in den Formeln (31) an Stelle von C eine neue Konstante C_1 einführt, indem n

$$C = C_1 + a_0 + \frac{a_1}{C_1} + \frac{a_2}{C_1^2} + \cdots$$

setzt und dann die rechten Seiten von (31) nach fallenden Potenzen von C_1 entwick

urven, so können wir, da das isogonale Trajektorien sind, die Gleichungen r Fläche in der Form (33) annehmen. Dabei ist es erlaubt, an Stelle s Parameters u eine willkürliche Funktion von u als neuen Parameter zuführen, die wir aber monoton ohne Konstanzintervalle und, um mit seren früheren Festsetzungen in Übereinstimmung zu bleiben, als zweiil stetig differenzierbar annehmen müssen. Eine geeignete Wahl behalten r uns vor.

Die Richtungskosinus der Geraden der Fläche verhalten sich wie

$$g_1 : g_2 : g_3,$$

der Tangenten wie

$$f_1' + v(g_1\varphi)' : f_2' + v(g_2\varphi)' : f_3' + v(g_3\varphi)',$$

dlich die der Binormalen wie die Determinanten der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} f_1' + v(g_1\varphi)' & f_2' + v(g_2\varphi)' & f_3' + v(g_3\varphi)' \\ f_1'' + v(g_1\varphi)'' & f_2'' + v(g_2\varphi)'' & f_3'' + v(g_3\varphi)'' \end{matrix} \right\|,$$

bei die Akzente wieder Differentiation nach u bedeuten. Da die Tanten mit den Geraden der Fläche den Winkel α bilden sollen, muß

$$\left[\sum_{\nu=1}^{3} g_\nu (f_\nu' + v(g_\nu\varphi)')\right]^2 = \cos^2\alpha \cdot \sum_{\nu=1}^{3} g_\nu^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{3} (f_\nu' + v(g_\nu\varphi)')^2$$

n. Da ferner die Binormalen mit den Geraden der Fläche den Winkel γ den sollen, erhält man die weitere Gleichung:

$$\left\{ \begin{vmatrix} g_1 & f_1' + v(g_1\varphi)' & f_1'' + v(g_1\varphi)'' \\ g_2 & f_2' + v(g_2\varphi)' & f_2'' + v(g_2\varphi)'' \\ g_3 & f_3' + v(g_3\varphi)' & f_3'' + v(g_3\varphi)'' \end{vmatrix}^2 \right.$$
$$\left. = \cos^2\gamma \cdot \sum_{\nu=1}^{3} g_\nu^2 \cdot \left\| \begin{matrix} f_1' + v(g_1\varphi)' & f_2' + v(g_2\varphi)' & f_3' + v(g_3\varphi)' \\ f_1'' + v(g_1\varphi)'' & f_2'' + v(g_2\varphi)'' & f_3'' + v(g_3\varphi)'' \end{matrix} \right\|^2 \right\}.$$

Die Differentialgleichungen (36), (37) *sind die Bedingungsgleichungen Problems. Unsere Aufgabe besteht also darin, diese Gleichungen vollndig zu integrieren.*

Da die Reihe (34) zweimal gliedweise nach u differenziert werden f, lassen sich die beiden Seiten der Gleichungen (36) und (37) nach lenden Potenzen von v entwickeln; in (36) ist die höchste Potenz von v zweite, in (37) die vierte. Setzt man in (36) den Koeffizienten von v^2 derseits gleich, so erhält man die Formel:

$$\left(\sum_{\nu=1}^{3} g_\nu g'_\nu\right)^2 = \cos^2\alpha \cdot \sum_{\nu=1}^{3} g_\nu^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{3} g'^2_\nu. \tag{38}$$

Ebenso, wenn man in (37) den Koeffizienten von v^4 auf beide Seiten gleichsetzt:

$$\begin{vmatrix} g_1 & g'_1 & g''_1 \\ g_2 & g'_2 & g''_2 \\ g_3 & g'_3 & g''_3 \end{vmatrix}^2 = \cos^2\gamma \cdot \sum_{\nu=1}^{3} g_\nu^2 \cdot \left\| \begin{matrix} g'_1 & g'_2 & g'_3 \\ g''_1 & g''_2 & g''_3 \end{matrix} \right\|^2. \tag{39}$$

Bei der Integration des Differentialgleichungssystems (38), (39) lasse wir in diesem Paragraphen die Möglichkeit, daß $\sum g_\nu g'_\nu$ identisch ve schwindet, beiseite, um ihre Erörterung in § 4 nachzuholen. Wegen (38 ist damit insbesondere der Fall orthogonaler Trajektorien ($\cos\alpha = 0$) au geschlossen. Wir wollen dann das Intervall für die Variable u dera eingeengt denken, daß $\sum g_\nu g'_\nu$ nirgends verschwindet und folglich ko stantes Vorzeichen hat. Dann ist $\sum g_\nu^2$ eine monotone und zweimal stet differenzierbare Funktion von u ohne Konstanzintervalle. Setzt man al

$$\sum_{\nu=1}^{3} g_\nu^2 = e^{2cu_1},$$

wo c eine von Null verschiedene Konstante bedeutet, so darf u_1 an Ste von u als neue unabhängige Variable eingeführt werden; über c werd wir später in passender Weise verfügen. Indem wir statt u_1 nachträgli wieder u schreiben, ist es also erlaubt, von vornherein

$$\sum_{\nu=1}^{3} g_\nu^2 = e^{2cu} \tag{40}$$

zu setzen. Durch Differentiation folgt hieraus:

$$\sum_{\nu=1}^{3} g_\nu g'_\nu = c e^{2cu}, \tag{41}$$

und daher ist wegen (38):

$$\sum_{\nu=1}^{3} g'^2_\nu = \frac{c^2}{\cos^2\alpha} e^{2cu}. \tag{42}$$

Durch Differentiation der Gleichung (41) ergibt sich unter Berücksichtig von (42):

$$\sum_{\nu=1}^{3} g_\nu g''_\nu = \frac{c^2(2\cos^2\alpha - 1)}{\cos^2\alpha} e^{2cu}. \tag{43}$$

ndlich erhält man noch durch Differentiation von (42):

$$\sum_{\nu=1}^{3} g_\nu' g_\nu'' = \frac{c^3}{\cos^2\alpha}\, e^{2cu}. \tag{4}$$

Stellt man nun in (39) rechts das Matrixquadrat als zweireihige eterminante dar und rechnet links das Determinantenquadrat kolonnenise aus, so treten in der entstehenden Formel gerade die Summen (40) s (44) auf, und außerdem noch die Summe $\sum g_\nu''^2$, die daraus berechnet rden kann. Man findet so zunächst:

$$c^4\alpha^2(1-\cos^2\alpha-\cos^2\gamma)\cdot\sum_{\nu=1}^{3} g_\nu''^2 = c^4(1-\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\cos^2\gamma)e^{2cu},$$

er mit Berücksichtigung von (35):

$$\cos^4\alpha\cos^2\beta\sum_{\nu=1}^{3} g_\nu''^2 = c^4(\sin^4\alpha+\cos^2\alpha\cos^2\beta)e^{2cu}$$

enn nun $\cos\beta = 0$ ist, so folgt hieraus, da $c \neq 0$ war, $\sin\alpha = 0$, was Natur unserer Aufgabe widerspricht (vgl. S. 231). Unter der gegenrtigen Voraussetzung, daß nämlich $\sum g_\nu g_\nu'$ nirgends verschwindet, haben o unsere Differentialgleichungen überhaupt nur dann eine Lösung, wenn

$$\cos\beta \neq 0 \tag{5}$$

wenn also die Hauptnormalen nicht senkrecht auf den Geraden der iche stehen. Indem wir diese Voraussetzung weiterhin im gegenwärtigen ragraphen machen, ergibt sich aus der letzten Gleichung:

$$\sum_{\nu=1}^{3} g_\nu''^2 = \frac{c^4(\sin^4\alpha+\cos^2\alpha\cos^2\beta)}{\cos^4\alpha\cos^2\beta}\, e^{2cu}. \tag{6}$$

Setzt man nun

$$g_\nu = e^{cu}\psi_\nu, \qquad (\nu = 1,2,3) \tag{7}$$

gehen die Gleichungen (40) bis (44) und (46) nach leichter Rechnung die folgenden über:

$$\psi_\nu^2 = 1, \quad \sum_{\nu=1}^{3}\psi_\nu\psi_\nu' = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{3}\psi_\nu'^2 = \frac{c^2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}, \quad \sum_{\nu=1}^{3}\psi_\nu\psi_\nu'' = -\frac{c^2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha},$$

$$\sum_{\nu=1}^{3}\psi_\nu'\psi_\nu'' = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{3}\psi_\nu''^2 = \frac{c^4\sin^2\alpha(\sin^4\alpha+\cos^2\alpha\cos^2\gamma)}{\cos^4\alpha\cos^2\beta}.$$

Für die bisher willkürlich gelassene Konstante c wählen wir jetzt zu Vereinfachung der Resultate den Wert

$$c = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sqrt{\sin^4\alpha + \cos^2\alpha\cos^2\gamma}}, \tag{48}$$

so daß die Werte für $\sum \psi_\nu'^2$ und $\sum \psi_\nu''^2$ einander gleich werden. Setzt man sie zur Abkürzung gleich k^2, also

$$k^2 = \frac{c^2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta}{\sin^4\alpha + \cos^2\alpha\cos^2\gamma}, \tag{49}$$

so nehmen unsere Gleichungen die einfache Form an:

$$\left\{\begin{array}{lll} \sum_{\nu=1}^{3}\psi_\nu^2 = 1, & \sum_{\nu=1}^{3}\psi_\nu\psi_\nu' = 0, & \sum_{\nu=1}^{3}\psi_\nu'^2 = k^2, \\ \sum_{\nu=1}^{3}\psi_\nu\psi_\nu'' = -k^2, & \sum_{\nu=1}^{3}\psi_\nu'\psi_\nu'' = 0, & \sum_{\nu=1}^{3}\psi_\nu''^2 = k^2. \end{array}\right. \tag{50}$$

Wegen (49) und (45) ist gewiß $k \neq 0$. Aus (49) folgt außerdem durch eine leichte Rechnung:

$$1 - k^2 = \frac{\cos^2\gamma}{\sin^4\alpha + \cos^2\alpha\cos^2\gamma}, \tag{51}$$

so daß $k^2 \leqq 1$ ist. Sehen wir für einen Moment von dem Fall $k^2 = 1$ ab, so besagen die Gleichungen (50), daß die neun Größen

$$\left\{\begin{array}{lll} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ \frac{\psi_1'}{k} & \frac{\psi_2'}{k} & \frac{\psi_3'}{k} \\ \frac{k^2\psi_1 + \psi_1''}{k\sqrt{1-k^2}} & \frac{k^2\psi_2 + \psi_2''}{k\sqrt{1-k^2}} & \frac{k^2\psi_3 + \psi_3''}{k\sqrt{1-k^2}} \end{array}\right. \tag{52}$$

die Koeffizienten einer orthogonalen Substitution sind. Folglich müssen auch die bekannten andern Formeln für die Koeffizienten einer solchen Substitution bestehen, z. B. wenn λ, μ, ν die Indizes 1, 2, 3 in irgendeiner Reihenfolge sind, die beiden folgenden:

$$\frac{\psi_\nu'}{k} = \pm\left(\psi_\lambda\frac{k^2\psi_\mu + \psi_\mu''}{k\sqrt{1-k^2}} - \psi_\mu\frac{k^2\psi_\lambda + \psi_\lambda''}{k\sqrt{1-k^2}}\right) = \pm\frac{\psi_\lambda\psi_\mu'' - \psi_\mu\psi_\lambda''}{k\sqrt{1-k^2}}, \tag{53}$$

$$\frac{k^2\psi_\nu + \psi_\nu''}{k\sqrt{1-k^2}} = \pm\left(\psi_\mu\frac{\psi_\lambda'}{k} - \psi_\lambda\frac{\psi_\mu'}{k}\right) = \pm\frac{1}{k}(\psi_\mu\psi_\lambda' - \psi_\lambda\psi_\mu'), \tag{54}$$

wo die oberen und unteren Vorzeichen in beiden Gleichungen einander entsprechen. Durch Integration folgt aus (53), wenn C_ν eine Integrationskonstante ist,

$$\psi_\nu' \sqrt{1-k^2} = \pm (\psi_\lambda \psi_\mu' - \psi_\mu \psi_\lambda') + C_\nu ,$$

d hieraus entsteht durch Vergleich mit (54) die Formel:

$$\psi_\nu' \sqrt{1-k^2} = -\frac{k^2 \psi_\nu + \psi_\nu'}{\sqrt{1-k^2}} + C_\nu ,$$

er einfacher:

5) $$\psi_\nu'' + \psi_\nu = C_\nu \sqrt{1-k^2}.$$

Diese Gleichung gilt nun aber auch in dem vorhin ausgeschlossenen ll $k^2 = 1$. Dann folgt nämlich aus (50)

$$\sum_{\nu=1}^{3} (\psi_\nu'' + \psi_\nu)^2 = k^2 - 2k^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0 ,$$

so $\psi_\nu'' + \psi_\nu = 0$, in Übereinstimmung mit (55) für $k^2 = 1$. Wir lassen so von jetzt an diesen Fall wieder zu.

Aus (55) folgt durch Integration:

6) $$\psi_\nu = A_\nu k \cos u + B_\nu k \sin u + C_\nu \sqrt{1-k^2},$$

o auch $A_\nu k$ und $B_\nu k$ Integrationskonstanten sind, die wir so bezeichnen nnen, weil ja $k \neq 0$ ist. Schließlich ist daher nach (47)

7) $$g_\nu = A_\nu k e^{cu} \cos u + B_\nu k e^{cu} \sin u + C_\nu \sqrt{1-k^2}\, e^{cu},$$

ofür wir symbolisch schreiben können:

7a) $$(g_1, g_2, g_3) = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \left(k e^{cu} \cos u,\ k e^{cu} \sin u,\ \sqrt{1-k^2}\, e^{cu} \right).$$

Damit sind die Gleichungen (38), (39) allgemein integriert. Die neun tegrationskonstanten A_ν, B_ν, C_ν sind jedoch nicht voneinander unabngig; vielmehr bestehen zwischen ihnen Relationen, die man erhält, enn man die Ausdrücke (56) in die Gleichungen (50) einsetzt. Aus der itten Gleichung (50) ergibt sich so:

8) $$\sum_{\nu=1}^{3} A_\nu^2 = 1, \quad \sum_{\nu=1}^{3} A_\nu B_\nu = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{3} B_\nu^2 = 1.$$

n Fall $k^2 = 1$ sind die übrigen Gleichungen (50) alsdann von selbst füllt. Für $k^2 < 1$ aber liefert die erste Gleichung (50) die neuen Bengungen

9) $$\sum_{\nu=1}^{3} A_\nu C_\nu = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{3} B_\nu C_\nu = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{3} C_\nu^2 = 1,$$

und die andern Gleichungen (50) sind dann von selbst erfüllt, so da weitere Bedingungen nicht mehr hinzutreten. Nichts hindert aber, auc im Fall $k^2 = 1$ die Bedingungen (59) hinzuzunehmen, da ja die Kon stanten C_ν für $k^2 = 1$ sowieso aus der Gleichung (56) herausfallen.

Die Gleichungen (58), (59) besagen, daß die in (57a) auftretend Matrix eine orthogonale ist. Man kann daher durch Drehung des Ko ordinatensystems es immer erreichen, daß die Gleichungen (57) oder (57a die folgende einfachere Form annehmen:

$$(60) \qquad \begin{cases} g_1 = k e^{cu} \cos u, \\ g_2 = \pm k e^{cu} \sin u, \\ g_3 = \sqrt{1 - k^2}\, e^{cu}, \end{cases}$$

wobei nach (48), (49), (51)

$$(61) \qquad c = \frac{\cos\alpha \cos\beta}{\sqrt{\sin^4\alpha + \cos^2\alpha \cos^2\gamma}},$$

$$(62) \qquad k^2 = \frac{\sin^2\alpha \cos^2\beta}{\sin^4\alpha + \cos^2\alpha \cos^2\gamma}, \qquad 1 - k^2 = \frac{\cos^2\gamma}{\sin^4\alpha + \cos^2\alpha \cos^2\gamma}$$

ist. Es bedeutet also keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn w weiterhin die Formeln (60) zugrunde legen. Dabei wollen wir die Quadra wurzel positiv nehmen; ebenso darf und soll die Größe k, von der bis jet nur das Quadrat definiert ist, als positiv angenommen werden. Bei g_2 i doppeltes Vorzeichen geschrieben, um zwei nicht kongruente, aber sy metrische Flächen unterscheiden zu können.

Die Gleichungen (61), (62) lassen sich nach α, β, γ auflösen. M findet:

$$(63) \qquad \cos^2\alpha = \frac{c^2}{k^2 + c^2}, \qquad \cos^2\beta = \frac{k^2}{1 + c^2}; \qquad \cos^2\gamma = \frac{k^2(1 - k^2)}{(k^2 + c^2)(1 + c^2)}.$$

§ 4.

Nachträgliche Erledigung eines Spezialfalles.

Wir haben im vorigen Paragraphen bei der Integration der Differentia gleichungen (38), (39) die Möglichkeit, daß $\sum g_\nu g'_\nu$ identisch verschwind zurückgestellt, wodurch wir insbesondere die beiden Fälle $\cos\alpha = 0$ u $\cos\beta = 0$ ausschließen mußten. Um die Lücke zu schließen, sei jetzt

$$(64) \qquad \sum_{\nu=1}^{3} g_\nu g'_\nu = 0.$$

Wir nehmen dabei zunächst an, daß $\sum g'^2_\nu$ nicht identisch v schwindet. Dieser Fall kann nach (38) nur eintreten, wenn $\cos\alpha = 0$ 1

enn es sich also um orthogonale Trajektorien handelt. Wir wollen dann as Intervall für u so bemessen denken, daß $\sum g_\nu'^2$ nirgends verschwindet.

Aus (64) folgt, daß $\sum g_\nu^2$ konstant ist, und indem wir in den Flächenleichungen (33) den Parameter v nötigenfalls durch Av ersetzen, wo A ne Konstante ist, dürfen wir

$$\sum_{\nu=1}^{3} g_\nu^2 = 1 \tag{65}$$

nnehmen. Indem wir statt u eine passende Funktion von u als neuen arameter einführen, können wir weiter erreichen, daß auch

$$\sum_{\nu=1}^{3} g_\nu'^2 = B^2 \tag{66}$$

onstant ist, und zwar dürfen wir B^2 noch beliebig annehmen (> 0); ne geeignete Wahl soll vorbehalten bleiben. Zu den Gleichungen (64) is (66) treten noch die folgenden beiden hinzu, die man durch ifferentiation erhält:

$$\sum_{\nu=1}^{3} g_\nu g_\nu'' = -B^2, \quad \sum_{\nu=1}^{3} g_\nu' g_\nu'' = 0. \tag{67}$$

Die Gleichung (38) ist nun wegen $\cos\alpha = 0$ und wegen (64) von lbst erfüllt. Die Gleichung (39) liefert einen Wert für $\sum g_\nu''^2$. Und war findet man zunächst

$$\sin^2\gamma \cdot \sum_{\nu=1}^{3} g_\nu''^2 = B^4.$$

ofür man wegen $\cos\alpha = 0$ auch schreiben kann:

$$\cos^2\beta \cdot \sum_{\nu=1}^{3} g_\nu''^2 = B^4.$$

ieraus erkennt man, daß für $\cos\beta = 0$ auch jetzt keine Lösung existiert. enn aber $\cos\beta \neq 0$, so folgt:

$$\sum_{\nu=1}^{3} g_\nu''^2 = \frac{B^4}{\cos^2\beta}. \tag{68}$$

Wir wollen nun für die noch willkürlich gelassene Konstante B^2 speziell en Wert $\cos^2\beta$ wählen. Die Gleichungen (64) bis (68) gehen dann in ie folgenden über:

$$(69)\quad \begin{cases} \sum_{\nu=1}^{3} g_\nu^2 = 1, & \sum_{\nu=1}^{3} g_\nu g_\nu' = 0, & \sum_{\nu=1}^{3} g_\nu'^2 = \cos^2\beta, \\ \sum_{\nu=1}^{3} g_\nu g_\nu'' = -\cos^2\beta, & \sum_{\nu=1}^{3} g_\nu' g_\nu'' = 0, & \sum_{\nu=1}^{3} g_\nu''^2 = \cos^2\beta. \end{cases}$$

Dieses Gleichungssystem unterscheidet sich aber von dem System (56) nur dadurch, daß ψ_ν durch g_ν und k^2 durch $\cos^2\beta$ ersetzt ist. Die Integration ergibt daher nach geeigneter Drehung des Koordinatensystems in Analogie zu den Formeln (60):

$$(70)\quad \begin{cases} g_1 = \cos\beta\cos u, \\ g_2 = \pm\cos\beta\sin u, \\ g_3 = \sin\beta. \end{cases}$$

Dabei dürfen $\sin\beta$ und $\cos\beta$ als nicht negativ angenommen werden, da eine positive Richtung der Hauptnormalen bisher nicht festgelegt war.

Die Gleichungen (70) besagen, daß die Formeln (60) in Verbindung mit (61) und (62) auch im Fall $\cos\alpha = 0$ gelten, der im vorigen Paragraphen ausgeschlossen war. In der Tat ist für $\cos\alpha = 0$ nach (61) und (62)

$$c = 0, \qquad k = \cos\beta;$$

für diese Werte von c und k gehen aber die Formeln (60) genau in (70) über.

Endlich bleibt noch der Fall, daß die Summen $\sum g_\nu g_\nu'$ und $\sum g_\nu'^2$ beide identisch verschwinden. Dann ist $g_\nu' = 0$, also g_ν konstant, und die Gleichungen (38), (39) sind identisch erfüllt. Die Fläche ist in diesem Fall ein Zylinder. Indem wir die Z-Achse parallel zu den Mantellinien wählen und in den Flächengleichungen (33) den Parameter v nötigenfalls wieder durch Av ersetzen, können wir die g_ν in der Form annehmen:

$$(71)\quad g_1 = 0, \quad g_2 = 0, \quad g_3 = 1.$$

Diese Gleichungen lehren zunächst, daß die Formeln (60) in Verbindung mit (61) und (62) auch in dem bisher ausgeschlossenen Fall $\cos\beta = 0$ also ausnahmslos, gelten. Denn für $\cos\beta = 0$ ist nach (61) und (62) auch $c = 0$, $k = 0$, so daß die Formeln (60) gerade in (71) übergehen.

Darüber hinaus liefern aber die Gleichungen (71) auch eine Lösung der Differentialgleichungen (38), (39), ohne daß $\cos\beta = 0$ ist. Das ist eine neue Lösung, die sich den allgemeinen Formeln (60) nicht subsumieren

§ 5.

Der Zylinder.

Wir wollen nun sogleich den Fall des Zylinders, wo also die Gleichungen (71) gelten, zu Ende führen. Da wir wissen, daß bei

linder die Reihe (34) sich auf ihr erstes Glied 1 reduziert, lauten die ächengleichungen (33) jetzt:

2)
$$\begin{cases} x = f_1(u), \\ y = f_2(u), \\ z = f_3(u) + v, \end{cases}$$

d die Bedingungsgleichungen des Problems, (36) und (37), nehmen gende Gestalt an:

$$f_3'^2 = \cos^2\alpha \cdot \sum_{\nu=1}^{3} f_\nu'^2, \qquad (f_1' f_2'' - f_2' f_1'')^2 = \cos^2\gamma \cdot \left\| \begin{matrix} f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \end{matrix} \right\|^2$$

$$= \cos^2\gamma \cdot \Big[\sum_{\nu=1}^{3} f_\nu'^2 \sum_{\nu=1}^{3} f_\nu''^2 - \Big(\sum_{\nu=1}^{3} f_\nu' f_\nu'' \Big)^2 \Big].$$

Wenn wir als Parameter u die Bogenlänge der Kurve $v = 0$ ein- ren, ist

3)
$$\sum_{\nu=1}^{3} f_\nu'^2 = 1,$$

d folglich durch Differentiation

4)
$$\sum_{\nu=1}^{3} f_\nu' f_\nu'' = 0,$$

daß unsere Bedingungsgleichungen übergehen in:

5)
$$f_3' = \pm \cos\alpha,$$

6)
$$(f_1' f_2'' - f_2' f_1'')^2 = \cos^2\gamma \cdot \sum_{\nu=1}^{3} f_\nu''^2.$$

Die Gleichung (76) läßt sich mit Hilfe der andern Gleichungen noch was vereinfachen. Aus (75) folgt nämlich $f_3'' = 0$, und folglich aus (74):

$$f_1' f_1'' + f_2' f_2'' = 0.$$

adriert man diese Gleichung und addiert sie dann zu Gleichung (76), geht diese über in:

$$(f_1'^2 + f_2'^2)(f_1''^2 + f_2''^2) = \cos^2\gamma \cdot \sum_{\nu=1}^{3} f_\nu''^2 = \cos^2\gamma \cdot (f_1''^2 + f_2''^2).$$

er auch, weil nach (73) und (75)

$$f_1'^2 + f_2'^2 = 1 - f_3'^2 = 1 - \cos^2\alpha = \cos^2\beta + \cos^2\gamma$$

einfach in:

7)
$$\cos^2\beta \cdot (f_1''^2 + f_2''^2) = 0.$$

Wir haben somit nur die Gleichungen (73), (75), (77) zu erfülle (74) ist als Folge von (73) dann von selbst erfüllt. Wenn nun $\cos\beta \neq$ so folgt aus (77): $f_1'' = 0$, $f_2'' = 0$. Daher sind f_1, f_2 lineare Funktione von u, und da nach (75) das gleiche von f_3 gilt, so ist die Fläche ei Ebene, aufgefaßt als Träger einer Schar paralleler Geraden. Das ist e ganz trivialer Fall; die isogonalen Trajektorien sind selbst Geraden, b denen man von Haupt- und Binormale überhaupt nicht reden kann.

Wenn aber $\cos\beta = 0$, so ist Gleichung (77) von selbst erfüllt; bleiben also nur noch (73) und (75) übrig. Diese besagen aber lediglic daß die Kurve $v = 0$ eine Kurve konstanter Neigung gegen die XY-Ebe ist, also eine allgemeine Schraubenlinie, und daß der Parameter u d Bogenlänge dieser Kurve ist. Im übrigen aber lassen sie die Gestalt ga willkürlich, so daß *jeder* Zylinder, der die vorausgesetzten Differenzie barkeitsbedingungen erfüllt, unsere Aufgabe löst Daraus folgt, daß auf jedem Zylinder eine Schar isogonaler Trajektorien (Schraubenlinie gibt, deren Hauptnormalen auf den Mantellinien des Zylinders senkrec stehen ($\cos\beta = 0$). Da aber α ganz beliebig bleibt, so ergibt sich weit die bekannte Tatsache, daß *jede* isogonale Trajektorie diese Eigenschaft h

Im vorigen Paragraphen zeigte sich, daß unser allgemeines Proble für $\cos\beta = 0$ keine Lösungen hat außer allenfalls Zylinder. In Verbindu mit dem soeben Bewiesenen ergibt sich also:

Die einzigen Regelflächen, auf denen eine Schar isogonaler Traje torien liegt, deren Hauptnormale in jedem Kurvenpunkt senkrecht auf d durch den betreffenden Punkt gehenden Geraden der Fläche steht, si die Zylinder. Bei diesen hat zudem jede isogonale Trajektorie die Eige schaft, daß ihre Hauptnormalen senkrecht zu den Mantellinien sind.

Die Behauptungen des § 1 sind damit bewiesen, soweit sie sich Zylinder beziehen. Außerdem zeigt sich, daß die Schlußbemerkung vorigen Paragraphen gegenstandslos ist. Die Formeln (71) liefern im F $\cos\beta \neq 0$ keine Lösung des Problems, wenn man nicht etwa die oben wähnte Ebene als solche gelten lassen will.

§ 6.

Die Schraubenfläche.

Wir legen jetzt die Gleichungen (60) zugrunde und behandeln zunäc den Fall $k = 1$, was nach (62) soviel besagt wie

$$\cos\gamma = 0. \tag{78}$$

Die Binormalen sollen also auf den Geraden der Fläche senkrecht steh Aus (61) folgt dann

$$c = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin^2\alpha};$$

gen $\cos\gamma = 0$ ist aber $\cos^2\beta = \sin^2\alpha$; also wird

9) $$c = \pm\operatorname{cotg}\alpha, \qquad \cos^2\alpha = \frac{c^2}{1+c^2}.$$

e Gleichungen (60) lauten jetzt:

0) $$\begin{cases} g_1 = e^{cu}\cos u, \\ g_2 = \pm e^{cu}\sin u, \\ g_3 = 0. \end{cases}$$

Die Bedingungsgleichung (37) des Problems nimmt mit Rücksicht f (78) die einfachere Form an:

1) $$\begin{vmatrix} g_1 & f_1' + v(g_1\varphi' + g_1'\varphi) & f_1'' + v(g_1\varphi'' + 2g_1'\varphi' + g_1''\varphi) \\ g_2 & f_2' + v(g_2\varphi' + g_2'\varphi) & f_2'' + v(g_2\varphi'' + 2g_2'\varphi' + g_2''\varphi) \\ g_3 & f_3' + v(g_3\varphi' + g_3'\varphi) & f_3'' + v(g_3\varphi'' + 2g_3'\varphi' + g_3''\varphi) \end{vmatrix} = 0,$$

ährend die andre Bedingungsgleichung, (36), sich zunächst nicht wesentlich reinfacht. Die Determinante in (81) läßt sich in die Summe von mehreren eterminanten spalten. Wenn zur Abkürzung nur jeweils die erste Zeile schrieben wird, erhält man dadurch:

1a) $$\begin{cases} |g_1 f_1' f_1''| + v\varphi(|g_1 g_1' f_1''| + |g_1 f_1' g_1''|) \\ + 2v\varphi'|g_1 f_1' g_1'| + v^2\varphi^2|g_1 g_1' g_1''| = 0. \end{cases}$$

Von den hier auftretenden Determinanten ist aber die letzte identisch ull, weil wegen (80) ihre dritte Zeile lauter Nullen enthält. Setzt man r φ die Reihe (34) in (81a) ein, so erhält man durch Nullsetzen des oeffizienten von v:

2) $$|g_1 g_1' f_1''| + |g_1 f_1' g_1''| = 0,$$

d durch Nullsetzen des von v freien Gliedes:

3) $$|g_1 f_1' f_1''| = 0.$$

t Rücksicht hierauf geht die Gleichung (81a) selbst über in:

4) $$\varphi'|g_1 f_1' g_1'| = 0.$$

Setzt man jetzt die Werte für g_r aus (80) zunächst in die Gleichun- n (82) und (84) ein, so nehmen diese die folgende einfachere Gestalt an:

2a) $$f_3'' - 2cf_3' = 0,$$

4a) $$\varphi' f_3' = 0.$$

Wenn nun f_3' identisch verschwindet, so ist f_3 konstant, also in de Flächengleichungen (33) auch z konstant. Die Fläche ist daher eine Eben aufgefaßt als Träger einer beliebigen Geradenschar. Das ist wieder ei ganz triviale Lösung unserer Aufgabe; denn offenbar ist ja jede isogona Trajektorie eine ebene Kurve und ihre Binormale steht senkrecht auf d Ebene, also auch auf der Geradenschar. Die Bedingung (81) ist jet identisch erfüllt, weil die dritte Zeile der Determinante lauter Null enthält, und die noch nicht berücksichtigte Bedingung (36) sagt lediglic aus, daß die gesuchten Kurven isogonale Trajektorien sind. Es ist unnöti das weiter zu verfolgen.

Wir wenden uns daher gleich zu dem Fall, daß f_3' nicht identis verschwindet. Dann ist nach (84a) $\varphi' = 0$, so daß sich die Reihe φ a ihr erstes Glied reduziert:

$$\varphi = 1. \tag{85}$$

Nun bleibt noch Gleichung (83) übrig; diese lautet, weil $g_3 = 0$ is folgendermaßen:

$$(g_1 f_2 - g_2 f_1') f_3'' - (g_1 f_2'' - g_2 f_1'') f_3' = 0,$$

oder mit Rücksicht auf (82a) und weil $f_3' \neq 0$ sein soll,

$$(g_1 f_2' - g_2 f_1') 2c = g_1 f_2'' - g_2 f_1''. \tag{86}$$

Außerdem muß aber die noch gar nicht berücksichtigte Bedingung (3 erfüllt werden. Diese nimmt wegen $\varphi = 1$ die Gestalt an:

$$\Big[\sum_{\nu=1}^{3} g_\nu (f_\nu' + v g_\nu')\Big]^2 = \cos^2\alpha \cdot \sum_{\nu=1}^{3} g_\nu^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{3} (f_\nu' + v g_\nu')^2, \tag{87}$$

oder, indem man die Koeffizienten gleicher Potenzen von v beidersei einander gleichsetzt und für $\cos^2\alpha$ den Wert aus (79) einsetzt:

$$(1+c^2)\Big(\sum_{\nu=1}^{2} g_\nu g_\nu'\Big)^2 = c^2 \sum_{\nu=1}^{2} g_\nu^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{2} g_\nu'^2, \tag{88}$$

$$(1+c^2)\sum_{\nu=1}^{2} g_\nu g_\nu' \cdot \sum_{\nu=1}^{2} g_\nu f_\nu' = c^2 \sum_{\nu=1}^{2} g_\nu^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{2} g_\nu' f_\nu', \tag{89}$$

$$(1+c^2)\Big(\sum_{\nu=1}^{2} g_\nu f_\nu'\Big)^2 = c^2 \sum_{\nu=1}^{2} g_\nu^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{3} f_\nu'^2, \tag{90}$$

wo wir wegen $g_3 = 0$ die Summen mit Ausnahme der letzten, die g_3 nic enthält, nur über die Werte $\nu = 1, 2$ erstreckt haben.

Hier ist nun die Gleichung (88) mit den Werten (80) von selb erfüllt, wie es nach unsrer Herleitung der Formeln (80) auch gar nic

ders sein kann. Die Gleichung (89) geht, wenn man für $\sum g_\nu g'_\nu$ und $\sum g_\nu^2$ e aus (80) resultierenden Werte einsetzt, zunächst in folgende über:

$$c\sum_{\nu=1}^{2}[(1+c^2)g_\nu - cg'_\nu]f'_\nu = 0.$$

ın überzeugt man sich mit Hilfe von (80) leicht von den Identitäten

$$(1+c^2)g_1 - cg'_1 = \pm g'_2,$$
$$(1+c^2)g_2 - cg'_2 = \mp g'_1,$$

daß die vorige Gleichung die einfache Gestalt erhält:

9a) $$c(g'_2 f' - g'_1 f'_2) = 0.$$

Wenn nun $c \neq 0$, folgt hieraus

$$f'_\nu - \varrho g'_\nu \qquad (\nu = 1, 2),$$

ϱ eine Funktion von u ist. Setzt man das in (90) ein, so ergibt sich:

$$(1+c^2)\varrho^2\left(\sum_{\nu=1}^{2} g_\nu g'_\nu\right)^2 = c^2\sum_{\nu=1}^{2} g_\nu^2 \cdot \left(\varrho^2\sum_{\nu=1}^{2} g'^2_\nu + f'^2_3\right).$$

btrahiert man aber davon die mit ϱ^2 multiplizierte Gleichung (88), so hält man:

$$0 = c^2\sum_{\nu=1}^{2} g_\nu^2 \cdot f'^2_3,$$

ıs wegen $f'_3 \neq 0$ der Annahme $c \neq 0$ widerspricht. Für $c \neq 0$ kommt so keine Lösung. Sei daher jetzt $c = 0$, so daß nach (78) und (79) s $\gamma = 0$, $\cos\alpha = 0$, also $\cos^2\beta = 1$ ist; das heißt, die Hauptnormalen llen mit den Geraden der Fläche zusammen. Dann ist Gleichung (89a) n selbst erfüllt, also auch (89). Die Gleichungen (86) und (90) vernfachen sich folgendermaßen:

$$g_1 f''_2 - g_2 f''_1 = 0,$$
$$g_1 f'_1 + g_2 f'_2 = 0.$$

us der letzten Gleichung folgt

$$f'_1 = -\varrho g_2, \qquad f'_2 = \varrho g_1,$$

nd wenn man das in die vorausgehende einsetzt, erhält man

$$g_1(\varrho' g_1 + \varrho g'_1) + g_2(\varrho' g_2 + \varrho g'_2) = 0,$$

ler einfach $\varrho' + c\varrho = 0$ Da aber $c = 0$, folgt hieraus, daß ϱ gleich ner Konstanten C ist. Daher

$$f_1' = -Cg_2 = \mp C \sin u,$$
$$f_2' = Cg_1 = C \cos u.$$

Durch Integration folgt hieraus:

$$f_1 = \pm C \cos u, \qquad f_2 = C \sin u,$$

wo neue Integrationskonstanten überflüssig sind, da diese nur eine Parallel verschiebung des Koordinatensystems bedeuten würden. Aus (82a) folg außerdem, weil $c = 0$ ist, $f_3' = C_1$, also $f_3 = C_1 u$, wo C_1 eine von Nu verschiedene Konstante sein muß.

Nunmehr sind alle Bedingungen erfüllt, und die Gleichungen d Fläche lauten:

$$x = \pm C \cos u + v \cos u,$$
$$y = C \sin u \pm v \sin u,$$
$$z = C_1 u,$$

oder einfacher, indem man $v \mp C$ an Stelle von v schreibt:

$$\begin{cases} x = v \cos u, \\ y = \pm v \sin u, \\ z = C_1 u. \end{cases} \tag{91}$$

Das ist die gemeine Schraubenfläche, und die Kurven $v = \text{const.}$ sin die Schraubenlinien darauf. So ergibt sich der Satz von Bertrand:

Auf der gemeinen Schraubenfläche gibt es eine Schar von Kurve nämlich die Schraubenlinien, deren Hauptnormalen die Geraden d Fläche sind. Die gemeine Schraubenfläche ist die einzige Regelfläc dieser Art.

§ 7.

Der allgemeine Fall: Böschungsflächen.

Nachdem die Fälle $k = 0$ und $k = 1$ in § 5 und § 6 vollständig e ledigt sind, wenden wir uns jetzt dem allgemeinen Fall

$$0 < k < 1 \tag{92}$$

zu. Dabei führen wir gewisse Größen $a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda}$ ein, indem wir setze

$$\sum_{\nu=1}^{3} g_\nu^{(\lambda)} g_\nu^{(\mu)} = a_{\lambda\mu} e^{2cu} \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, 2, \ldots \tag{93}$$

wo die oberen Indizes wieder Differentiation nach u bedeuten (spezie ist $g_\nu^{(0)} = g_\nu$). Trägt man für die Funktionen g_ν die Ausdrücke aus (6 in die vorstehenden Summen ein, so erweisen sich die $a_{\lambda\mu}$ als Konstante Insbesondere ist

$$\text{4)}\quad \begin{cases} a_{00}=1, & a_{01}=c, & a_{02}=c^2-k^2, \\ a_{10}=c, & a_{11}=c^2+k^2, & a_{12}=c^3+k^2c, \\ a_{20}=c^2-k^2, & a_{21}=c^3+k^2c, & a_{22}=c^4+2k^2c^2+k^2, \\ a_{30}=c^3-3k^2c, & a_{31}=c^4-k^2, & a_{32}=c^5+2k^2c^3+k^2c. \end{cases}$$

zt man weiter

$$\text{5)}\quad \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta,$$

findet man durch Einsetzen der obigen Werte:

$$\text{6)}\quad \Delta = k^4(1-k^2),$$

daß wegen (92) gewiß $\Delta \neq 0$ ist. Man kann daher eindeutig drei ößen γ_0, γ_1, γ_2 derart bestimmen, daß die Gleichungen

$$\text{7)}\quad a_{0\varkappa}\gamma_0 + a_{1\varkappa}\gamma_1 + a_{2\varkappa}\gamma_2 = a_{3\varkappa} \qquad (\varkappa = 0, 1, 2)$$

ten. Die Unterdeterminanten der Determinante (95) bezeichnen wir t $A_{\lambda\mu}$; dann ist $A_{\lambda\mu} = A_{\mu\lambda}$, und außerdem

$$\text{8)}\quad a_{\mu 0}A_{\mu 0} + a_{\mu 1}A_{\mu 1} + a_{\mu 2}A_{\mu 2} = \Delta \quad (\mu = 0, 1, 2),$$

$$\text{9)}\quad a_{\mu 0}A_{\nu 0} + a_{\mu 1}A_{\nu 1} + a_{\mu 2}A_{\nu 2} = 0 \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2;\ \mu \neq \nu).$$

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir die Bedingungsgleichungen s Problems, (36) und (37), dadurch umformen, daß wir an Stelle der ei unbekannten Funktionen f_1', f_2', f_3' drei neue Unbekannte ξ_0, ξ_1, ξ_2 führen, die mit ihnen durch die Gleichungen verbunden sind:

$$\text{00)}\quad f_\nu' = g_\nu\xi_0 + g_\nu'\xi_1 + g_\nu''\xi_2 \qquad (\nu = 1, 2, 3).$$

s ist möglich, weil sich für die Determinante des Systems mit Hilfe n (60) ein von Null verschiedener Wert ergibt, nämlich:

$$\text{01)}\quad \begin{vmatrix} g_1 & g_1' & g_1'' \\ g_2 & g_2' & g_2'' \\ g_3 & g_3' & g_3'' \end{vmatrix} = \pm k^2\sqrt{1-k^2}\,e^{3cu}.$$

Die Bedingungsgleichung (36) nimmt hiernach zunächst die folgende rm an:

$$\Big[\sum_{\nu=1}^{3} g_\nu(g_\nu\xi_0 + g_\nu'\xi_1 + g_\nu''\xi_2 + v g_\nu\varphi' + v g_\nu'\varphi)\Big]^2$$

$$= \cos^2\alpha \cdot \sum_{\nu=1}^{3} g_\nu^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{3} (g_\nu\xi_0 + g_\nu'\xi_1 + g_\nu''\xi_2 + v g_\nu\varphi' + v g_\nu'\varphi)^2.$$

Also, wenn man durch v^2 dividiert und die Abkürzungen

$$\varphi' + \frac{\xi_0}{v} = X_0, \quad \varphi + \frac{\xi_1}{v} = X_1, \quad \frac{\xi_2}{v} = X_2 \tag{102}$$

oder mit Hilfe von (34) ausführlicher

$$\begin{cases} X_0 = \frac{\xi_0}{v} + \frac{\omega_2'}{v^2} + \frac{\omega_3'}{v^3} + \dots, \\ X_1 = 1 + \frac{\xi_1}{v} + \frac{\omega_2}{v^2} + \frac{\omega_3}{v^3} + \dots, \\ X_2 = \frac{\xi_2}{v} \end{cases} \tag{103}$$

einführt:

$$\Big[\sum_{\nu=1}^{3} g_\nu (g_\nu X_0 + g_\nu' X_1 + g_\nu'' X_2)\Big]^2 = \cos^2\alpha \cdot \sum_{\nu=1}^{3} g_\nu^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{3} (g_\nu X_0 + g_\nu' X_1 + g_\nu'' X_2)^2$$

Mit Benutzung der Formeln (93) ist diese Gleichung aber gleic bedeutend mit der folgenden:

$$(a_{00} X_0 + a_{01} X_1 + a_{02} X_2)^2 = \cos^2\alpha \cdot a_{00} \cdot \sum_{\lambda\mu}^{012} a_{\lambda\mu} X_\lambda X_\mu . \tag{104}$$

Setzt man hier die Reihen (103) ein und entwickelt dann beide Seite nach Potenzen von v, so erhält man durch beiderseitige Gleichsetzun der von v freien Glieder:

$$a_{01}^2 = \cos^2\alpha \cdot a_{00} a_{11} . \tag{105}$$

Diese Formel liefert in der Tat, wie es gar nicht anders sein kann, wen man für die $a_{\lambda\mu}$ die Werte aus (94) einsetzt, den bereits in (63) a gegebenen Wert für $\cos^2\alpha$. Trägt man diesen in die Gleichung (10 ein, so erhält man nach Multiplikation mit a_{11}:

$$a_{11}(a_{00} X_0 + a_{01} X_1 + a_{02} X_2)^2 = a_{01}^2 \sum_{\lambda\mu}^{012} a_{\lambda\mu} X_\lambda X_\mu . \tag{106}$$

Da nach (94) $a_{11} \neq 0$ ist, so ist diese Gleichung mit (104), also auc mit (36) völlig äquivalent. Multipliziert man sie noch mit a_{00} (= und subtrahiert dann beiderseits die Größe

$$a_{01}^2 (a_{00} X_0 + a_{01} X_1 + a_{02} X_2)^2 ,$$

so erhält man die folgende, ebenfalls völlig äquivalente Form:

$$\begin{aligned} &A_{22}(a_{00} X_0 + a_{01} X_1 + a_{02} X_2)^2 \\ &= a_{01}^2 (A_{22} X_1^2 - 2 A_{21} X_1 X_2 + A_{11} X_2^2). \end{aligned} \tag{106a}$$

Das sind nun homogene Gleichungen mit konstanten Koeffizienten zwische den Funktionen X_λ von u und v.

Die Bedingungsgleichung (37) des Problems nimmt, wenn man zur kürzung

$$g_\nu X_0 + g_\nu' X_1 + g_\nu'' X_2 = Y_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3),$$

nach (102) und (100)

$$Y_\nu = \frac{1}{v} f_\nu' + (g_\nu \varphi)' \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

zt, zunächst die Form an:

$$\begin{vmatrix} g_1 & Y_1 & Y_1' \\ g_2 & Y_2 & Y_2' \\ g_3 & Y_3 & Y_3' \end{vmatrix}^2 = \cos^2\gamma \cdot \sum_{\nu=1}^{3} g_\nu^2 \cdot \left\| \begin{matrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Y_1' & Y_2' & Y_3' \end{matrix} \right\|^2 .$$

se Gleichung wollen wir in eine homogene Gleichung mit konstanten effizienten zwischen den Funktionen X_λ und ihren Ableitungen X_λ' rführen. Dazu definieren wir vorübergehend drei Funktionen Z_0, Z_1, Z_2 ch die Gleichungen

$$\begin{cases} g_1 Z_0 + g_1' Z_1 + g_1'' Z_2 = Y_2 Y_3' - Y_3 Y_2', \\ g_2 Z_0 + g_2' Z_1 + g_2'' Z_2 = Y_3 Y_1' - Y_1 Y_3', \\ g_3 Z_0 + g_3' Z_1 + g_3'' Z_2 = Y_1 Y_2' - Y_2 Y_1', \end{cases}$$

wieder möglich ist, da die Determinante (101) nicht verschwindet. Gleichung (108) geht dadurch über in die folgende:

$$\left[\sum_1^3 g_\nu (g_\nu Z_0 + g_\nu' Z_1 + g_\nu'' Z_2)\right]^2 = \cos^2\gamma \cdot \sum_{\nu=1}^{3} g_\nu^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{3} (g_\nu Z_0 + g_\nu' Z_1 + g_\nu'' Z_2)^2,$$

r unter Benutzung der Formeln (93)

$$(a_{00} Z_0 + a_{10} Z_1 + a_{20} Z_2)^2 = \cos^2\gamma \cdot a_{00} \cdot \sum_{\lambda,\mu}^{012} a_{\lambda\mu} Z_\lambda Z_\mu .$$

Definiert man endlich drei Größen W_0, W_1 W_2 durch die Gleichungen

$$A_{0\mu} W_0 + A_{1\mu} W_1 + A_{2\mu} W_2 = Z_\mu \qquad (\mu = 0, 1, 2),$$

r aufgelöst:

$$\Delta W_\lambda = a_{\lambda 0} Z_0 + a_{\lambda 1} Z_1 + a_{\lambda 2} Z_2 \qquad (\lambda = 0, 1, 2),$$

geht Formel (110) über in:

$$\Delta^2 W_0^2 = \cos^2\gamma \cdot a_{00} \cdot \sum_{\lambda=0}^{2} \Delta W_\lambda Z_\lambda = \cos^2\gamma \cdot a_{00} \Delta \sum_{\mu\lambda}^{012} A_{\mu\lambda} W_\mu W_\lambda .$$

Um nun noch die W_λ durch die X_μ auszudrücken, lösen wir die ichungen (109) nach Z_μ auf. Es ergibt sich, wenn $\varkappa, \lambda, \mu$ irgendeine lische Permutation der Zahlen 0, 1, 2 ist,

$$\begin{vmatrix} g_1 & g_1' & g_1'' \\ g_2 & g_2' & g_2'' \\ g_3 & g_3' & g_3'' \end{vmatrix} \cdot Z_\mu = \begin{Vmatrix} g_1^{(\varkappa)} & g_2^{(\varkappa)} & g_3^{(\varkappa)} \\ g_1^{(\lambda)} & g_2^{(\lambda)} & g_3^{(\lambda)} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Y_1' & Y_2' & Y_3' \end{Vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_{\nu=1}^{3} g_\nu^{(\varkappa)} Y_\nu & \sum_{\nu=1}^{3} g_\nu^{(\varkappa)} Y_\nu' \\ \sum_{\nu=1}^{3} g_\nu^{(\lambda)} Y_\nu & \sum_{\nu=1}^{3} g_\nu^{(\lambda)} Y_\nu' \end{vmatrix}.$$

Nach (107) ist aber mit Benutzung von (93)

$$(114) \qquad \sum_{\nu=1}^{3} g_\nu^{(\varkappa)} Y_\nu = e^{2cu}(a_{0\varkappa} X_0 + a_{1\varkappa} X_1 + a_{2\varkappa} X_2).$$

Beachtet man weiter, daß die Funktionen f_ν nach unseren Voraussetzung mindestens zweimal, die Funktionen g_ν aber nach (60) beliebig oft di renzierbar sind, so erkennt man, daß die durch die Formeln (100) finierten Funktionen ξ_λ mindestens einmal stetig differenzierbar sind. gleiche gilt daher von den Funktionen X_λ, so daß man durch Differentiati der Gleichung (107) erhält:

$$(115) \qquad Y_\nu' = g_\nu' X_0 + g_\nu'' X_1 + g_\nu''' X_2 + g_\nu X_0' + g_\nu' X_1' + g_\nu'' X_2'.$$

Hiernach ist

$$\sum_{\nu=1}^{3} g_\nu^{(\varkappa)} Y_\nu' = e^{2cu}(a_{1\varkappa} X_0 + a_{2\varkappa} X_1 + a_{3\varkappa} X_2 + a_{0\varkappa} X_0' + a_{1\varkappa} X_1' + a_{2\varkappa} X_2'$$

oder, indem man $a_{3\varkappa}$ durch den Wert aus (97) ersetzt,

$$(116) \begin{cases} \sum_{\nu=1}^{3} g_\nu^{(\varkappa)} Y_\nu' = e^{2cu}[a_{0\varkappa}(\gamma_0 X_2 + X_0) + a_{1\varkappa}(X_0 + \gamma_1 X_2 + X_1') \\ \qquad + a_{2\varkappa}(X_1 + \gamma_2 X_2 + X_2')]. \end{cases}$$

Trägt man die Werte (114) und (116) in den obigen Ausdruck Z_μ ein, so erhält man:

$$\begin{vmatrix} g_1 & g_1' & g_1'' \\ g_2 & g_2' & g_2'' \\ g_3 & g_3' & g_3'' \end{vmatrix} e^{-4cu} Z_\mu$$

$$= \begin{vmatrix} a_{0\varkappa} X_0 + a_{1\varkappa} X_1 + a_{2\varkappa} X_2 & a_{0\varkappa}(\gamma_0 X_2 + X_0') + a_{1\varkappa}(X_0 + \gamma_1 X_2 + X_1') \\ & \qquad + a_{2\varkappa}(X_1 + \gamma_2 X_2 + X_2') \\ a_{0\lambda} X_0 + a_{1\lambda} X_1 + a_{2\lambda} X_2 & a_{0\lambda}(\gamma_0 X_2 + X_0') + a_{1\lambda}(X_0 + \gamma_1 X_2 + X_1') \\ & \qquad + a_{2\lambda}(X_1 + \gamma_2 X_2 + X_2') \end{vmatrix}$$

$$\left\| \begin{matrix} a_{0\varkappa} & a_{1\varkappa} & a_{2\varkappa} \\ a_{0\lambda} & a_{1\lambda} & a_{2\lambda} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ \gamma_0 X_2 + X_0' & X_0 + \gamma_1 X_2 + X_1' & X_1 + \gamma_2 X_2 + X_2' \end{matrix} \right\|$$

$A_{0\mu} V_0 + A_{1\mu} V_1 + A_{2\mu} V_2$,

bei V_0, V_1, V_2 die Determinanten der zuletzt geschriebenen Matrix sind, b ausgerechnet

$$7) \quad \begin{cases} V_0 = X_1^2 - X_0 X_2 + \gamma_2 X_1 X_2 - \gamma_1 X_2^2 + X_1 X_2' - X_2 X_1', \\ V_1 = -X_0 X_1 + \gamma_0 X_2^2 - \gamma_2 X_0 X_2 + X_2 X_0' - X_0 X_2', \\ V_2 = X_0^2 + \gamma_1 X_0 X_2 - \gamma_0 X_1 X_2 + X_0 X_1' - X_1 X_0'. \end{cases}$$

Vergleicht man den soeben gefundenen Wert für Z_μ mit der Formel (111), erkennt man, daß die Größen V_0, V_1, V_2 proportional sind mit W_0, W_1, W_2. Formel (113) ist daher unter Berücksichtigung des Umstandes, daß $= 0$ ist, völlig äquivalent mit der folgenden:

$$8) \qquad \Delta V_0^2 = \cos^2\gamma \cdot a_{00} \sum_{\mu\lambda}^{012} A_{\mu\lambda} V_\mu V_\lambda .$$

er ist der Koeffizient von V_0^2 auf der linken Seite nach (96) gleich $1 - k^2$). Auf der rechten Seite ist er mit Rücksicht auf (63) und) gleich

$$^2\gamma \cdot a_{00} A_{00} = \cos^2\gamma \cdot a_{00}(a_{11} a_{22} - a_{12}^2)$$

$$= \frac{k^2(1-k^2)}{(k^2+c^2)(1+c^2)}(k^2 c^4 + k^4 c^2 + k^2 c^2 + k^4) = k^4(1-k^2).$$

beiden Glieder mit V_0^2 heben sich also auf beiden Seiten weg. Wenn n dann die Gleichung noch durch die von Null verschiedene Größe $^2\gamma \cdot a_{00}$ dividiert, erweist sie sich als völlig äquivalent mit der folgenden:

$$9) \quad 2A_{01} V_0 V_1 + A_{11} V_1^2 + 2A_{02} V_0 V_2 + 2A_{12} V_1 V_2 + A_{22} V_2^2 = 0.$$

Bedingungsgleichung (37) ist daher ebenfalls mit der Gleichung (119) ivalent. Das ist aber mit Rücksicht auf (117) eine homogene Relation konstanten Koeffizienten zwischen den Größen X_λ, X_λ'.

Nachdem unser Problem nunmehr auf die beiden Gleichungen (106) er die gleichbedeutende (106a)) und (119) zurückgeführt ist, wollen in diesem Paragraphen nur die Möglichkeit erörtern, daß ξ_2 identisch chwindet, oder was nach (103) dasselbe sagt, daß X_2 identisch verindet. Dann reduziert sich die Bedingung (106a) auf folgende:

$$A_{22}(a_{00} X_0 + a_{01} X_1)^2 = a_{01}^2 A_{22} X_1^2,$$

also, weil $A_{22} = a_{00} a_{11} - a_{01}^2 = k^2 \neq 0$, und $a_{00} = 1$ ist,

$$X_0(X_0 + 2a_{01} X_1) = 0.$$

Wenn nun $a_{01} = 0$ ist, besagt das: $X_0 = 0$. Wenn aber $a_{01} \neq 0$, so h der Ausdruck in der Klammer, wenn man ihn mit Hilfe von (103) na fallenden Potenzen von v entwickelt, das konstante Glied $2a_{01}$; er kan also nicht verschwinden, und daher muß wieder $X_0 = 0$ sein.

Mit $X_2 = 0$, $X_0 = 0$ ist nun die Bedingung (106a) identisch erfül Nach (117) ist dann aber auch $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, so daß auch die B dingung (119) bereits erfüllt ist. Weitere Bedingungen sind daher nic mehr erforderlich. Die Gleichung $X_0 = 0$ besagt nach (103):

$$\xi_0 = 0,$$
$$\omega_n' = 0 \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots$$

Daher sind die Funktionen ω_n konstant, und da wir $\omega_n(a) = 0$ annehm durften (vgl. die Bemerkungen im Anschluß an Formel (34)), sind ω_n identisch Null, und die Reihe φ in (34) reduziert sich auf ihr ers Glied 1.

Für die Funktion ξ_1 ergibt sich keine Bedingung; sie bleibt wi kürlich; doch muß sie, wie S. 260 bemerkt wurde, mindestens einmal ste differenzierbar sein. Nach (100) ist nun

$$f_\nu' = \xi_1 g_\nu' \qquad (\nu = 1, 2, \ldots$$

Setzt man hier für g_ν' die aus (60) resultierenden Werte ein, so kann m f_ν und folglich die Flächengleichungen (33) mittels Quadraturen darstell Man erhält, wenn man zur Vereinfachung die beiden Gleichungen für und y mit Hilfe der imaginären Einheit in eine zusammenfaßt:

$$(121) \qquad \begin{cases} x + iy = k(c \pm i)\int \xi_1(u)\, e^{(c \pm i)u}\, du + kve^{(c \pm i)u}, \\ z = \sqrt{1 - k^2}\, c \int \xi_1(u)\, e^{cu}\, du + \sqrt{1 - k^2}\, ve^{cu}. \end{cases}$$

Nach den an die Formeln (33) geknüpften Bemerkungen müssen Flächen, da sich $\omega_n = 0$ herausgestellt hat, abwickelbar sein. Man erken das auch aus der Gleichung (120), welche das identische Verschwinden Determinante (7) zur Folge hat.

Die Gratlinie hat die Gleichung $v = -\xi_1(u)$. Führt man an Ste von v einen andern Parameter w ein, indem man

$$v = -\xi_1(u) + we^{-cu}$$

setzt, so lauten die Flächengleichungen:

$$x + iy = k(c \pm i)\int \xi_1(u)\, e^{(c \pm i)u}\, du - k\xi_1(u)\, e^{(c \pm i)u} + ke^{\pm iu} w,$$
$$z = \sqrt{1 - k^2}\, c \int \xi_1(u)\, e^{cu}\, du - \sqrt{1 - k^2}\, \xi_1(u)\, e^{cu} + \sqrt{1 - k^2}$$

r nach Anwendung einer partiellen Integration:

$$2) \qquad \begin{cases} x + iy = -k \int \xi_1'(u)\, e^{(c+i)u}\, du + k e^{+iu} w, \\ z = -\sqrt{1-k^2} \int \xi_1'(u)\, e^{cu}\, du + \sqrt{1-k^2}\, w. \end{cases}$$

Aus dieser Darstellung ist nun sofort zu erkennen, daß die Fläche sächlich abwickelbar, und daß $w = 0$ die Gleichung der Gratlinie ist. bei darf $\xi_1'(u)$ eine ganz beliebige stetige Funktion sein; daher ist auch $\xi_1'(u)\, e^{cu}$ jede stetige Funktion zulässig. Setzt man also

$$\xi_1'(u)\, e^{cu} = -F(u),$$

nehmen die Gleichungen die einfachere Form an:

$$x + iy = k \int F(u)\, e^{\pm iu}\, du + k e^{+iu} w,$$

$$z = \sqrt{1-k^2} \int F(u)\, du + \sqrt{1-k^2}\, w.$$

bei ist es aber unnötig, das doppelte Vorzeichen weiter mitzuführen. nn die Formel mit dem unteren Vorzeichen geht aus der mit dem ren hervor, indem man u durch $-u$ ersetzt und für $-F(-u)$ ein- h wieder $F(u)$ schreibt. Die Flächengleichungen sind daher definitiv folgenden:

$$3) \qquad \begin{cases} x + iy = k \int F(u)\, e^{iu}\, du + k e^{iu} w, \\ z = \sqrt{1-k^2} \int F(u)\, du + \sqrt{1-k^2}\, w. \end{cases}$$

An dieser Form unserer Lösung überrascht nun, daß die Größe c gar ht mehr darin vorkommt, sondern nur noch k. Wenn also die Winkel β, γ nur an die eine Bedingung (62) geknüpft sind, so hat unsere Auf- e stets die gleichen Flächen zur Lösung. Auf den Flächen (123) hat er *jede* isogonale Trajektorie die Eigenschaft, daß auch ihre Haupt- und ormalen konstante Winkel mit den Geraden der Fläche bilden; und r findet man bei gegebenem α die Winkel β, γ stets aus (62).

Die Flächen (123) sind *Böschungsflächen*. Ihre Geraden bilden mit XY-Ebene den Winkel λ, wobei

$$\operatorname{tang} \lambda = \frac{\sqrt{1-k^2}}{k},$$

nach (62)

$$\operatorname{tang} \lambda = \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha \cos \beta}$$

Die Kurven $v = \text{const.}$ bilden ebenfalls mit der XY-Ebene einen stanten Winkel μ, sind also allgemeine Schraubenlinien, und zwar let man aus (121) mit Benutzung von (61) und (62):

$$\operatorname{tang} \mu = \frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2}} = \frac{\sqrt{1-k^2}}{k} \frac{c}{\sqrt{c^2-1}} = \frac{\cos\alpha\cos\gamma}{\sin^2\alpha}.$$

Daraus erkennt man, daß jedenfalls die Böschungsflächen unsere Au gabe lösen, und daß sie alle in der Einleitung erwähnten Eigenschafte haben. Denn die Gleichungen (123) stellen offenbar *jede* Böschungsfläch dar, mit Ausnahme der Zylinder. Daß aber auch die Zylinder uns Problem lösen, und daß dabei die Winkelrelationen gelten, ist bereits § 5 erkannt.

Ebenso stellen in (121) die Kurven $v = \text{const.}$, ja schon die Kurv $v = 0$ offenbar *jede* (allgemeine) Schraubenlinie dar, die stetig gekrümm ist, die ebenen Kurven nicht ausgenommen ($c = 0$). Daraus resultie dann der in § 1 erwähnte Satz des Herrn Voß.

§ 8.

Beweis, daß keine weiteren Lösungen existieren. Ein Spezialfall.

Im vorigen Paragraphen haben wir das Problem im Fall $0 < k <$ auf die beiden Gleichungen (106) und (119) zurückgeführt und dabei di jenigen Lösungen erörtert, für welche $\xi_2 = 0$, d. h. $X_2 = 0$ ist. W wenden uns jetzt zu der Möglichkeit $\xi_2 \neq 0$ und wollen zeigen, daß solche Lösungen überhaupt nicht gibt. Dabei prüfen wir zunächst d Fall $a_{01} = 0$, d. h. nach (94): $c = 0$. Nach (94) ist dann weiter

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k^2 \\ 0 & k^2 & 0 \\ -k^2 & 0 & k^2 \\ 0 & -k^2 & 0 \end{pmatrix}$$

und folglich

$$\begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^4 & 0 & k^4 \\ 0 & k^2 - k^4 & 0 \\ k^4 & 0 & k^2 \end{pmatrix},$$

so daß die Gleichungen (106) und (119) sich auf die folgenden reduziere

$$X_0 - k^2 X_2 = 0, \tag{124}$$

$$(1 - k^2) V_1^2 + 2 k^2 V_0 V_2 + V_2^2 = 0. \tag{125}$$

Die Definitionsgleichungen (97) für $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ lauten jetzt:

$$\gamma_0 - k^2 \gamma_2 = 0, \quad k^2 \gamma_1 = -k^2, \quad -k^2 \gamma_0 + k^2 \gamma_2 = 0,$$

daß $\gamma_0 = \gamma_2 = 0$, $\gamma_1 = -1$ ist. Die Werte für V_λ sind daher nach (117) folgenden:

$$V_0 = X_1^2 - X_0 X_2 + X_2^2 + X_1 X_2 - X_2 X_1',$$
$$V_1 = -X_0 X_1 + X_2 X_0' - X_0 X_2',$$
$$V_2 = X_0^2 - X_0 X_2 + X_0 X_1' - X_1 X_0'.$$

Aus der Gleichung (vgl. (103))

$$X_2 = \frac{\xi_2}{v} + 0$$

gt nach (124)

$$X_0 = \frac{k^2 \xi_2}{v},$$

o, wenn man das mit der Definitionsgleichung (103) für X_0 vergleicht:

$$\xi_0 = k^2 \xi_2, \qquad \omega_n = 0,$$

daß auch wieder $\omega_n = 0$ ist. Aus (103) folgt dann weiter

$$X_1 = 1 + \frac{\xi_1}{v},$$

daß sich für V_0, V_1, V_2 einfach die nachstehenden Werte ergeben:

$$V_0 = 1 + \frac{2\xi_1 + \xi_2'}{v} + \frac{\xi_1^2 + (1-k^2)\xi_2^2 + \xi_1 \xi_2' - \xi_2 \xi_1'}{v^2},$$

$$V_1 = -\frac{k^2 \xi_2}{v} - \frac{k^2 \xi_1 \xi_2}{v^2},$$

$$V_2 = -\frac{k^2 \xi_2'}{v} + \frac{(k^4 - k^2)\xi_2^2 + k^2(\xi_2 \xi_1' - \xi_1 \xi_2')}{v^2}.$$

hrt man diese in die Gleichung (125) ein und entwickelt nach Potenzen n $\frac{1}{v}$, so ergibt sich aus dem Glied mit $\frac{1}{v}$:

$$\xi_2' = 0.$$

t Rücksicht hierauf liefern die Glieder mit $\frac{1}{v^2}$ und $\frac{1}{v^4}$ der Reihe nach e Gleichungen:

$$(1-k^2)\,k^4 \xi_2^2 + 2k^2[(k^4 - k^2)\xi_2^2 + k^2 \xi_2 \xi_1'] = 0,$$

$$-k^2)\,k^4 \xi_1^2 \xi_2^2 + 2k^2[\xi_1^2 + (1-k^2)\xi_2^2 - \xi_2 \xi_1'][(k^4 - k^2)\xi_2^2 + k^2 \xi_2 \xi_1']$$
$$+ [(k^4 - k^2)\xi_2^2 + k^2 \xi_2 \xi_1']^2 = 0.$$

enn man nun den Wert, der sich aus der ersten Gleichung für $\xi_2 \xi$ gibt, in die zweite einträgt, erhält man:

$$(1-k^2)\,k^4\,\xi_1^2\,\xi_2^2 - [2\,k^2\,\xi_1^2 + (1-k^2)\,k^2\,\xi_2^2]\,\frac{(1-k^2)\,k^2}{2}\,\xi_2^2 + \left(\frac{(1-k^2)\,k^2}{2}\,\xi_2^2\right)^2 = 0,$$

oder nach leichter Reduktion

$$-\left(\frac{(1-k^2)\,k^2}{2}\,\xi_2^2\right)^2 = 0,$$

was aber der Voraussetzung $\xi_2 \neq 0$ widerspricht. Somit ergibt sich kei Lösung unseres Problems.

§ 9.

Fortsetzung. Der allgemeine Fall.

Wir kommen jetzt zum Fall $a_{01} \neq 0$, also $c \neq 0$. Nach (94) ist au

$$A_{02} = a_{10}\,a_{21} - a_{11}\,a_{20} = k^2\,c^2 + k^4 \neq 0,$$
$$A_{22} = a_{00}\,a_{11} - a_{01}^2 = k^2 \neq 0.$$

Außerdem ist wieder $X_2 = \frac{\xi_2}{v} \neq 0$.

Trägt man die Ausdrücke (103) in die Gleichung (106a) ein, en wickelt beide Seiten nach fallenden Potenzen von v und setzt die Koef zienten von $\frac{1}{v}$ einander gleich, so erhält man:

$$2\,A_{22}\,a_{01}\,(a_{00}\,\xi_0 + a_{01}\,\xi_1 + a_{02}\,\xi_2) = a_{01}^2\,(2\,A_{22}\,\xi_1 - 2\,A_{21}\,\xi_2),$$

also nach Division durch $2\,a_{01}$:

$$A_{22}\,a_{00}\,\xi_0 = -\,(a_{01}\,A_{21} + a_{02}\,A_{22})\,\xi_2 = a_{00}\,A_{20}\,\xi_2 \quad \text{(nach (99))},$$

oder einfach, weil $a_{00} = 1$ und $A_{22} \neq 0$ ist,

$$\xi_0 = \frac{A_{20}}{A_{22}}\,\xi_2 = \frac{A_{02}}{A_{22}}\,\xi_2. \tag{126}$$

Setzt man weiter die Ausdrücke (103) in (117) ein, so erhält ma

$$V_0 = 1 + \ldots, \quad V_1 = -\frac{\xi_0}{v} + \ldots, \quad V_2 = -\frac{\gamma_0\,\xi_2 + \xi_0'}{v} + \ldots. \tag{127}$$

Entwickelt man hiernach die linke Seite der Gleichung (119) nach fallend Potenzen von v, so liefert das Glied mit $\frac{1}{v}$ die Beziehung:

$$-2\,A_{01}\,\xi_0 - 2\,A_{02}\,(\gamma_0\,\xi_2 + \xi_0') = 0,$$

oder wenn man für ξ_0 und ξ_0' den Wert aus (126) einsetzt:

$$\xi_2' = C\,\xi_2, \quad \text{wobei} \quad C = -\frac{A_{01} + \gamma_0\,A_{22}}{A_{02}}. \tag{128}$$

aher ist auch

$$\frac{X_2'}{X_2} = \frac{\xi_2'}{\xi_2} = C. \tag{28a}$$

Man könnte nun wie im vorigen Paragraphen versuchen, die Entwicklung nach Potenzen von $\frac{1}{v}$ bei den Gleichungen (106a) und (119) weiterzutreiben und aus den so entstehenden Formeln einen Widerspruch herzuleiten. Diese Methode scheitert aber an dem Umfang der Rechnungen; man kommt bei (119) über die niedersten Potenzen nicht hinaus, und diese führen noch nicht zu einem Widerspruch. Wir müssen daher einen andern Weg suchen und wollen unsere Gleichungen zunächst etwas umformen. Die Gleichung (119) läßt sich augenscheinlich folgendermaßen schreiben:

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & V_0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & V_1 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & V_2 \\ V_0 & V_1 & V_2 & 0 \end{vmatrix} + A_{00} V_0^2 = 0. \tag{29}$$

Nun lehren die Definitionsgleichungen (117) unmittelbar, daß identisch

$$\sum_{\lambda=0}^{2} V_\lambda X_\lambda = 0$$

ist. Die Gleichung (129) geht daher, wenn man sie mit X_2^2 multipliziert, und zwar in der Determinante die dritte Zeile und die dritte Kolonne je mit X_2, nach leichter Umformung über in:

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \sum a_{0\mu} X_\mu & V_0 \\ a_{10} & a_{11} & \sum a_{1\mu} X_\mu & V_1 \\ \sum a_{\lambda 0} X_\lambda & \sum a_{\lambda 1} X_\lambda & \sum a_{\lambda\mu} X_\lambda X_\mu & 0 \\ V_0 & V_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + A_{00} V_0^2 X_2^2 = 0,$$

oder ausgerechnet:

$$V_0^2 \Big[A_{00} X_2^2 - a_{11} \sum_{\lambda\mu}^{012} a_{\lambda\mu} X_\lambda X_\mu + \Big(\sum_{\mu=0}^{2} a_{1\mu} X_\mu \Big)^2 \Big]$$

$$+ 2 V_0 V_1 \Big[a_{01} \sum_{\lambda\mu}^{012} a_{\lambda\mu} X_\lambda X_\mu - \sum_{\lambda=0}^{2} a_{\lambda 0} X_\lambda \cdot \sum_{\mu=0}^{2} a_{1\mu} X_\mu \Big]$$

$$+ V_1^2 \Big[\Big(\sum_{\mu=0}^{2} a_{0\mu} X_\mu \Big)^2 - a_{00} \sum_{\lambda\mu}^{012} a_{\lambda\mu} X_\lambda X_\mu \Big] = 0.$$

Hier ist aber der Faktor von V_0^2 identisch gleich

$$2 A_{02} X_0 X_2 - A_{22} X_0^2;$$

der Faktor von $2 V_0 V_1$ ist mit Rücksicht auf (106) gleich

$$\frac{1}{a_{01}} \Big[a_{11} \Big(\sum_{\lambda=0}^{2} a_{0\lambda} X_\lambda \Big)^2 - a_{01} \sum_{\lambda=0}^{2} a_{0\lambda} X_\lambda \cdot \sum_{\lambda=0}^{2} a_{1\lambda} X_\lambda \Big]$$

$$= \frac{1}{a_{01}} \sum_{\lambda=0}^{2} a_{0\lambda} X_\lambda \cdot \Big(a_{11} \sum_{\lambda=0}^{2} a_{0\lambda} X_\lambda - a_{01} \sum_{\lambda=0}^{2} a_{1\lambda} X_\lambda \Big)$$

$$= \frac{1}{a_{01}} \sum_{\lambda=0}^{2} a_{0\lambda} X_\lambda \cdot (A_{22} X_0 - A_{02} X_2);$$

der Faktor von V_1^2 endlich ist wieder mit Rücksicht auf (106) gleich

$$\Big(\sum_{\lambda=0}^{2} a_{0\lambda} X_\lambda \Big)^2 \Big(1 - \frac{a_{00} a_{11}}{a_{01}^2} \Big) = - \frac{A_{22}}{a_{01}^2} \Big(\sum_{\lambda=0}^{2} a_{0\lambda} X_\lambda \Big)^2,$$

so daß unsere Gleichung übergeht in:

$$\frac{A_{22}}{a_{01}^2} \Big(\sum_{\lambda=0}^{2} a_{0\lambda} X_\lambda \Big)^2 V_1^2 - \frac{1}{a_{01}} \sum_{\lambda=0}^{2} a_{0\lambda} X_\lambda \cdot (A_{22} X_0 - A_{02} X_2) \cdot 2 V_0 V_1$$

$$+ (A_{22} X_0^2 - 2 A_{02} X_0 X_2) V_0^2 = 0,$$

oder nach Multiplikation mit $A_{22} a_{01}^2$:

$$\Big[A_{22} \sum_{\lambda=0}^{2} a_{0\lambda} X_\lambda \cdot V_1 - a_{01} (A_{22} X_0 - A_{02} X_2) V_0 \Big]^2 = a_{01}^2 A_{02}^2 X_2^2 V_0^2.$$

Hier kann man nun die Wurzel ziehen und erhält:

$$(130) \quad A_{22} \sum_{\lambda=0}^{2} a_{0\lambda} X_\lambda \cdot V_1 - a_{01} (A_{22} X_0 - A_{02} X_2) V_0 = \pm a_{01} A_{02} X_2 V_0.$$

Um das Vorzeichen zu bestimmen, entwickeln wir nach Potenzen von $\frac{1}{v}$.

Das erste Glied wird nach (103) und (127) auf beiden Seiten das mit $\frac{1}{v}$

und dieses liefert:

$$- A_{22} a_{01} \xi_0 - a_{01} (A_{22} \xi_0 - A_{02} \xi_2) = \pm a_{01} A_{02} \xi_2,$$

oder mit Rücksicht auf (126)

$$- a_{01} A_{02} \xi_2 = \pm a_{01} A_{02} \xi_2.$$

Hier gilt aber, da $a_{01} A_{02} \xi_2 \neq 0$ ist, nur das untere Zeichen. Folglich muß auch in Gleichung (130) das untere Zeichen stehen, und man erhält

$$(131) \quad A_{22} (a_{00} X_0 + a_{01} X_1 + a_{02} X_2) V_1 = a_{01} (A_{22} X_0 - 2 A_{02} X_2) V_0.$$

Diese Gleichung ist schon wesentlich einfacher als (119). Zur weiteren ereinfachung wollen wir, nachdem ja $X_2 \neq 0$ ist, zu inhomogenen Größen bergehen, indem wir setzen:

$$32) \qquad \frac{X_0}{X_2} = R, \qquad \frac{X_1}{X_2} = S.$$

ie Gleichung (106a) nimmt dann nach Division durch X_2^2 die Form an:

$$33) \qquad A_{22}(a_{00}R + a_{01}S + a_{02})^2 = a_{01}^2(A_{22}S^2 - 2A_{21}S + A_{11}),$$

ler nach leichter Reduktion:

$$34) \qquad 2a_{00}a_{01}(A_{22}R - A_{02})S = a_{01}^2 A_{11} - A_{22}(a_{00}R + a_{02})^2.$$

benso geht die Gleichung (131), wenn man für V_0, V_1 die Werte aus 17) einsetzt, nach Division durch X_2^3 über in:

$$35) \quad \begin{cases} A_{22}(a_{00}R + a_{01}S + a_{02})(-RS + \gamma_0 - \gamma_2 R + R') \\ = a_{01}(A_{22}R - 2A_{02})(S^2 - R + \gamma_2 S - \gamma_1 - S'). \end{cases}$$

m hier die Ableitung R' herauszuschaffen, differenzieren wir Gleichung (133) ch u; es ergibt sich:

$$A_{22}(a_{00}R + a_{01}S + a_{02})(a_{00}R' + a_{01}S') = a_{01}^2(A_{22}S - A_{21})S',$$

ler nach leichter Reduktion:

$$A_{22}(a_{00}R + a_{01}S + a_{02})R' = -a_{01}(A_{22}R - A_{02})S'.$$

ıbtrahiert man diese Gleichung von (135), so fällt R' heraus, und man hält:

$$A_{22}(a_{00}R + a_{01}S + a_{02})(-RS + \gamma_0 - \gamma_2 R)$$
$$= a_{01}(A_{22}R - 2A_{02})(S^2 - R + \gamma_2 S - \gamma_1) + a_{01}A_{02}S',$$

er etwas anders geschrieben:

$$_1 A_{02}S' = A_{22}(a_{00}R + a_{01}S + a_{02})(\gamma_0 - \gamma_2 R) + a_{01}(A_{22}R - 2A_{02})(R - \gamma_2 S + \gamma_1)$$
$$- [2a_{01}(A_{22}R - A_{02})S + A_{22}(a_{00}R^2 + a_{02}R)]S.$$

a aber der Ausdruck in der eckigen Klammer nach (134) gleich

$$\frac{1}{a_{00}}(a_{01}^2 A_{11} - a_{02}^2 A_{22} - a_{00}a_{02}A_{22}R) = a_{01}^2 a_{22} - a_{02}^2 a_{11} - a_{02}A_{22}R$$

, so erhält man schließlich

$$36) \quad \begin{cases} a_{01}A_{02}S' = A_{22}(a_{00}R + a_{01}S + a_{02})(\gamma_0 - \gamma_2 R) - (a_{01}^2 a_{22} - a_{02}^2 a_{11})S \\ + a_{01}(A_{22}R - 2A_{02})(R - \gamma_2 S + \gamma_1) + a_{02}A_{22}RS. \end{cases}$$

Nun ist

$$R = \frac{X_0}{X_2} = \frac{\xi_0}{\xi_2} + \frac{\omega_2'}{\xi_2}\frac{1}{v} + \frac{\omega_3'}{\xi_2}\frac{1}{v^2} + \ldots,$$

so nach (126)

$$37) \qquad R = \frac{A_{02}}{A_{22}} + \frac{\omega_2'}{\xi_2}\frac{\mathrm{i}}{v} + \frac{\omega_3'}{\xi_2}\frac{1}{v^2} + \cdots.$$

Wenn etwa alle $\omega_u' = 0$ sind, also R den konstanten Wert $\frac{A_{02}}{A_{22}}$ hat, s
folgt aus (134):

$$0 = a_{01}^2 A_{11} - A_{22}\left(\frac{a_{00}A_{02} + a_{20}A_{22}}{A_{22}}\right)^2 = a_{01}^2 A_{11} - \frac{(a_{10}A_{12})^2}{A_{22}}$$

$$= \frac{a_{01}^2}{A_{22}}(A_{11}A_{22} - A_{12}^2) = \frac{a_{01}^2 a_{00}\Delta}{A_{22}}.$$

Das ist aber augenscheinlich falsch, weil $a_{01}^2 a_{00}\Delta \neq 0$ ist. Daher sin
nicht alle $\omega_u' = 0$, und *R ist folglich nach* (137) *nicht unabhängig von*

Die Gleichung (134) lehrt dann aber, daß S eine rationale Funktio
von R allein ist, die im Unendlichen einen Pol erster Ordnung hat, un
zwar gilt die Entwicklung:

$$S = -\frac{a_{00}}{2a_{01}}R + \cdots. \tag{138}$$

Nach (136) ist dann auch S' eine rationale Funktion von R. Sie hat i
Unendlichen einen Pol zweiter Ordnung, und zwar findet man die En
wicklung:

$$S' = \frac{A_{22}}{2a_{01}^2 A_{02}}(2a_{01}^2 - a_{00}a_{02})R^2 + \cdots. \tag{139}$$

Für die Größe in der Klammer errechnet sich aus (94) der Wert $c^2 + k^2$
sie ist also von Null verschieden, so daß der Pol wirklich *von der zweite
Ordnung* ist (nicht von geringerer).

Nun gelangt man rasch zu einem Widerspruch. Denn nach (132) is

$$X_0 = X_2 R, \qquad X_1 = X_2 S,$$

also mit Benutzung von (103)

$$\frac{\xi_1' - \xi_0}{v} = X_1' - X_0 = X_2' S + X_2 S' - X_2 R.$$

Dividiert man diese Gleichung durch $\frac{\xi_2}{v} = X_2$ und berücksichtigt dab
die Formel (128a), so erhält man:

$$\frac{\xi_1' - \xi_0}{\xi_2} = CS + S' - R.$$

Hier ist nun die linke Seite eine Funktion von u allein, *unabhängig von*
Die rechte Seite aber ist nach dem soeben Bewiesenen eine rationa
Funktion von R, die im Unendlichen einen Pol zweiter Ordnung hat, al
gewiß nicht konstant ist. Da, wie oben bemerkt, R nicht von v una
hängig ist, kann auch diese rationale Funktion von R nicht unabhängi
von v sein. Damit sind wir in der Tat zu einem Widerspruch gelang
unser Problem hat also außer den bereits gefundenen keine weitere Lösun

(Eingegangen am 2. Januar 1919.)

ber das Maximum des absoluten Betrages eines Polynoms in einem gegebenen Intervall.

Von

I. Schur in Berlin.

Bei seinen Untersuchungen über die Approximation stetiger Funknen durch Polynome ist Tschebyschef bekanntlich auf eine Reihe rkwürdiger Sätze über das Verhalten des absoluten Betrages eines lynoms in einem gegebenen Intervall geführt worden. Weitere interante Resultate verdankt man insbesondere Herrn A. Markoff, seinem ıg verstorbenen Bruder W. Markoff und in neuerer Zeit Herrn Bernstein. Eines der schönsten und einfachsten unter diesen Resulen ist der bekannte Satz des Herrn A. Markoff[1]) über die Ableitung ıes gegebenen Polynoms. Im folgenden will ich zeigen, daß dieser Satz h nach verschiedenen Richtungen hin noch wesentlich ergänzen läßt. ıbesondere gebe ich an, wie der A. Markoffsche Satz zu modifizieren , wenn man nur solche Polynome in Betracht zieht, die an einem oder beiden Endpunkten des vorgeschriebenen Intervalls verschwinden. In gem Zusammenhang hiermit steht die Frage nach den Beziehungen ischen dem absoluten Betrage eines für $x = 0$ verschwindenden Polyms $f(x)$ und dem von $\frac{f(x)}{x}$ Bei diesen Untersuchungen bediene ich ch der einfachen Beweismethode, die Herr M. Riesz[2]) mit ausgezeichtem Erfolg zur Herleitung und Vertiefung einiger der Hauptsätze dieser eorie benutzt hat. Sie beruht in erster Linie auf der Heranziehung ssend gewählter Interpolationsformeln.

---

[1]) „Über ein Problem von D. J. Mendelejeff“ (russisch). Abh. der Akad. der ss. zu St. Petersburg, Bd 62 (1889), S. 1—24.

[2]) „Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für ynome“, Jahresber. der Deutschen Math.-Ver., Bd. 23 (1914), S. 354—368. und ber einen Satz des Herrn Serge Bernstein“, Acta Math., Bd. 40 (1916), S. 337 347. — Die zuerst genannte Arbeit werde ich im folgenden mit I zitieren.

§ 1.

Kurze Herleitung des A. Markoffschen Satzes.

Die Koeffizienten der im folgenden zu betrachtenden Polynome sollen, wenn nicht das Gegenteil hervorgehoben wird, beliebige komplexe Zahlen bedeuten können. Das Maximum einer (stetigen) Funktion $\varphi(x)$ in einem endlichen Intervall $a \leqq x \leqq b$ bezeichne ich mit $\mathrm{Max}(\varphi; a, b)$. Unter $T_n(x)$ verstehe ich wie üblich das von Tschebyschef so oft betrachtete Polynom

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \tfrac{1}{2}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n\right] = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^\nu n}{2(n-\nu)} \binom{n-\nu}{\nu} (2x)^{n-2\nu}.$$

Es wird also

$$(1) \qquad T_n(\cos\varphi) = \cos n\varphi, \quad T_n'(\cos\varphi) = \frac{n \sin n\varphi}{\sin\varphi},$$

$$\mathrm{Max}(|T_n|; -1, 1) = 1, \quad \mathrm{Max}(|T_n'|; -1, 1) = n^2.$$

In diesen Bezeichnungen läßt sich der Satz des Herrn A. Markoff so aussprechen:

Für jedes Polynom

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

besteht die Ungleichung

$$\mathrm{Max}(|f'|; -1, 1) \leqq n^2 \cdot \mathrm{Max}(|f|; -1, 1)$$

und das Gleichheitszeichen gilt hier nur für Polynome $f(x)$ der Form const. $T(x)$[3]).

Ein wichtiges Analogon zu diesem Satz verdankt man Herrn S. Bernstein[4]):

Für jedes trigonometrische Polynom

$$F(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos\nu\varphi + b_\nu \sin\nu\varphi)$$

---

[3]) Herr A. Markoff hat diesen Satz a. a. O. nur für reelle Koeffizienten a_ν bewiesen; daß er auch für komplexe a_ν gilt, hat zuerst Herr M. Riesz (I, S. 359) gezeigt.

[4]) „Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné", Mémoires publiés par la Classe des Sciences de l'Académie de Belgique, Bd. 4 (1912), S. 1–103 [S. 19–20]. Vgl. auch L. Fejér, „Über konjugierte trigonometrische Reihen", Journal f. r. u. a. Math., Bd. 144 (1914), S. 48 bis 56 [S. 50, Fußnote], und M. Fekete, „Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein", ebenda Bd. 146 (1915), S. 88–94.

steht die Ungleichung

$$\mathrm{Max}(|F'(\varphi)|; 0, 2\pi) \leqq n \cdot \mathrm{Max}(|F(\varphi)|; 0, 2\pi);$$

s Gleichheitszeichen gilt nur für Ausdrücke der Form const. $\sin n(\varphi - \varphi_0)$.

Für diesen Satz hat Herr M. Riesz (I, S. 356) einen besonders einchen Beweis angegeben, der nur von der leicht abzuleitenden Identität

$$F'(\varphi) = \frac{1}{2n} \sum_{\nu=1}^{2n} F(\varphi + \varphi_\nu) \frac{(-1)^{\nu+1}}{1 - \cos \varphi_\nu} \qquad \left(\varphi_\nu = \frac{(2\nu-1)\pi}{2n}\right)$$

ebrauch macht. Herr Riesz hat auch gezeigt, daß der Markoffsche tz sich aus dem Bernsteinschen verhältnismäßig leicht folgern läßt. och etwas direkter kann man folgendermaßen schließen.

Es genügt offenbar die Ungleichung

$$|f'(x)| \leqq M n^2 \qquad (M = \mathrm{Max}(|f|; -1, 1))$$

r $0 \leqq x \leqq 1$ zu beweisen. Für $0 \leqq x \leqq \cos \frac{\pi}{2n}$ folgt dies unmittelbar, dem man $x = \cos\varphi$ setzt und den Bernsteinschen Satz auf das Kosinuslynom $F(\varphi) = f(\cos\varphi)$ anwendet (vgl. Riesz, I, S. 360). Denn aus

$$F'(\varphi) = -\sin\varphi f'(\cos\varphi), \qquad |F'(\varphi)| \leqq M n$$

gibt sich für $-1 < x < 1$

$$|f'(x)| \leqq \frac{Mn}{\sqrt{1-x^2}},$$

o speziell für $0 \leqq x \leqq \cos \frac{\pi}{2n}$

$$f'(x)| \leqq \frac{Mn}{\sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi}{2n}}} = \frac{Mn}{\sin \frac{\pi}{2n}} < M n^2.$$

n nun (2) auch für

$$\cos \frac{\pi}{2n} < x \leqq 1$$

beweisen, setze man $\alpha_\mu = \cos \frac{\mu\pi}{n}$ und

$$g(x) = (x^2 - 1) T_n'(x) = 2^{n-1} n \prod_{\nu=0}^{n} (x - \alpha_\nu),$$

daß also

$$g(\cos\varphi) = -n \sin\varphi \sin n\varphi$$

rd. Nach der Lagrangeschen Interpolationsformel wird

$$f(x) = \sum_{\mu=1}^{n} g_\mu(x) \frac{f(\alpha_\mu)}{g'(\alpha_\mu)}, \qquad \left(g_\mu(x) = \frac{g(x)}{x - \alpha_\mu}\right)$$

o

$$f'(x) = \sum_{\mu=0}^{n} g_\mu'(x) \frac{f(\alpha_\mu)}{g'(\alpha_\mu)}.$$

Für $f(x) = T_n(x)$ geht diese Formel wegen

$$\operatorname{sign} g'(\alpha_\mu) = (-1)^\mu = T_n(\alpha_\mu) \tag{6}$$

in

$$T_n'(x) = \sum_{\mu=0}^{n} \frac{g_\mu'(x)}{|g'(\alpha_\mu)|}$$

über. Ich behaupte nun, daß die $n+1$ Ausdrücke $g_\mu(x)$ im Intervall (4) nur positive Werte annehmen. Für $\mu = 0$ ist das gewiß richtig, weil die Nullstellen von

$$g_0'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{x-1}\right)$$

links von $\cos\frac{\pi}{n} < \cos\frac{\pi}{2n}$ liegen und $\lim_{x=\infty} g_0'(x) = +\infty$ ist. Ist aber $\mu > 0$, so wird in

$$g_\mu'(x) = \frac{(x-\alpha_\mu)g'(x) - g(x)}{(x-\alpha_\mu)^2}$$

für $\cos\frac{\pi}{2n} < x \leqq 1$

$$g(x) \leqq 0, \qquad x - \alpha_\mu > 0$$

und $g'(x) > 0$, weil

$$g'(\cos\varphi) = \frac{1}{\sin\varphi}(n\cos\varphi\sin n\varphi + n^2\sin\varphi\cos n\varphi) \tag{7}$$

für $0 \leqq \varphi < \frac{\pi}{2n}$ positiv ist. Daher ist in der Tat $g_\mu'(x) > 0$ im Intervall (4) und folglich

$$|f'(x)| \leqq \sum_{\mu=0}^{n} g_\mu'(x)\frac{|f(\alpha_\mu)|}{|g'(x_\mu)|} \leqq \sum_{\mu=0}^{n} g_\mu'(x)\frac{M}{|g'(\alpha_\mu)|} = M\,T_n'(x) \leqq M\,n^2.$$

Zugleich ergibt sich, daß in der nun bewiesenen Ungleichung (2) das Gleichheitszeichen nur dann stehen kann, wenn die $n+1$ Zahlen $f(\alpha_\mu)$ sich von den entsprechenden Zahlen (6) nur um einen konstanten Faktor unterscheiden. Dann wird aber $f(x) = \text{const.}\, T_n(x)$.

Beachtet man, daß die Funktionen $g_\mu(x)$ nur reelle Nullstellen besitzen und daß $g_\mu(-x) = (-1)^n g_{n-\mu}(x)$ ist, so folgt aus dem über $g_\mu'(x)$ Bewiesenen, daß auch die höheren Ableitungen von $g_\mu(x)$ außerhalb des Intervalls

$$-\cos\frac{\pi}{2n} < x < \cos\frac{\pi}{2n} \tag{8}$$

keinen Vorzeichenwechsel erleiden. Hieraus schließt man in derselben Weise wie vorhin für $f'(x)$ im Intervall (4), daß für $k = 1, 2, \ldots,$ außerhalb des Intervalls (8) die Ungleichung

$$|f^{(k)}(x)| \leqq M \cdot |T_n^{(k)}(x)|$$

steht. Im Innern des Intervalls (8) ist, wie W. Markoff in seiner im hre 1892 erschienenen und neuerdings in den Mathematischen Annalen d. 77 (1916), S. 213—258) wiederabgedruckten Abhandlung „Über Po- nome, die in einem gegebenen Intervalle möglichst wenig von Null ab- ichen" auf wesentlich komplizierterem Wege bewiesen hat,

$$|f^{(k)}(x)| < M \cdot T_n^{(k)}(1) = M \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\dots(n^2-(k-1)^2)}{1.3.5\dots(2k-1)}.$$

wäre von Interesse, für diesen allgemeinen Satz einen ähnlich einfachen weis zu kennen wie für den Fall $k = 1$.

§ 2.

Präzisere Fassung des A. Markoffschen Satzes.

I. *Ist $f(x)$ ein Polynom n-ten Grades, für das*

$$\operatorname{Max}(|f|; -1, 1) = M$$

so ist stets

$$|f'(\pm 1)| \leqq M n^2,$$

bei das Gleichheitszeichen auszuschließen ist, wenn $f(x)$ nicht die Form ist. $T_n(x)$ hat. Besitzt ferner $|f'(x)|$ an einer Stelle ξ des Intervalls $1 \leqq x \leqq 1$ ein (relatives) Maximum, so ist (für $n \geqq 3$)

$$|f'(\xi)| < \frac{Mn^2}{2}.$$

Der erste Teil dieses Satzes ist uns schon bekannt, der zweite Teil ibt sich folgendermaßen. Haben die Zahlen α_μ sowie die Ausdrücke c) und $g_\mu(x)$ dieselbe Bedeutung wie in § 1, so liefert die Lagrange- e Interpolationsformel für alle Werte von t und x

$$f(tx) = \sum_{\mu=0}^{n} g_\mu(t) \frac{f(x\alpha_\mu)}{g'(\alpha_\mu)}.$$

ferentiiert man nach t und setzt dann $t = 1$, so ergibt sich

$$xf'(x) = \sum_{\mu=0}^{n} g_\mu'(1) \frac{f(x\alpha_\mu)}{g'(\alpha_\mu)} = \sum_{\mu=0}^{n} A_\mu f(x\alpha_\mu).$$

rbei wird wegen (5)

$$A_0 = \frac{1}{g'(1)}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{g(t)}{t-1}\right)\right]_{t=1} = \frac{g''(1)}{2g'(1)} = \frac{2T_n'(1)+4T_n''(1)}{4T_n'(1)} = \frac{2n^2-1}{6}$$

für $\mu > 0$

$$A_\mu = \frac{(1-\alpha_\mu)g'(1)-g(1)}{g'(\alpha_\mu)(1-\alpha_\mu)^2} = \frac{g'(1)}{g'(\alpha_\mu)} \cdot \frac{1}{1-\alpha_\mu}.$$

Die Formel (7) liefert nun

$$g'(1)=2n^2, \qquad g'(\alpha_n)=g'(-1)=(-1)^n g'(1), \qquad g'(\alpha_\nu)=(-1)^\nu n$$
$$(\nu=1,2,\ldots,n-1)$$

Wir erhalten also die Identität

$$(10)\quad xf'(x)=\frac{2n^2+1}{6}f(x)+\frac{(-1)^n}{2}f(-x)+\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{(-1)^\nu}{\sin^2\frac{\nu\pi}{2n}}f\left(x\cos\frac{\nu\pi}{n}\right),$$

die für jedes Polynom $f(x)$ gilt, dessen Grund höchstens gleich n ist. Daher ist auch

$$xf''(x)=\frac{2n^2+1}{6}f'(x)+\frac{(-1)^n}{2}f'(-x)+\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{(-1)^\nu}{\sin^2\frac{\nu\pi}{2n}}f'\left(x\cos\frac{\nu\pi}{n}\right).$$

Aus dieser Gleichung und der aus (10) durch Differentiation nach x folgenden ergibt sich durch Addition

$$f'(x)+2xf''(x)=\frac{2n^2+1}{3}f'(x)+\sum_{\nu=1}^{n-1}(-1)^\nu\frac{1+\cos\frac{\nu\pi}{n}}{\sin^2\frac{\nu\pi}{2n}}f'\left(x\cos\frac{\nu\pi}{n}\right)$$

oder, was dasselbe ist,

$$(11)\quad -\frac{n^2-1}{3}f'(x)+xf''(x)=\sum_{\nu=1}^{n-1}(-1)^\nu\operatorname{ctg}^2\frac{\nu\pi}{2n}f'\left(x\cos\frac{\nu\pi}{n}\right).$$

Bedeutet nun $f(x)$ dasjenige Polynom, das man aus $f(x)$ erhält, indem man alle Koeffizienten von $f(x)$ durch die konjugiert komplexen Werte ersetzt, so folgt aus (11) für reelle Werte von x

$$-\frac{n^2-1}{3}|f'(x)|^2+x\Re(f''(x)\bar{f}'(x))=\sum_{\nu=1}^{n-1}(-1)^\nu\operatorname{ctg}^2\frac{\nu\pi}{2n}\Re\left(\bar{f}'(x)f'\left(x\cos\right.\right.$$

Besitzt nun $|f'(x)|$ an der Stelle $x=\xi$ ein Maximum, so gilt dasselbe für $|f'(x)|^2=f'(x)\bar{f}'(x)$ und daher wird

$$f''(\xi)\bar{f}'(\xi)+f'(\xi)\bar{f}''(\xi)=2\Re(f''(\xi)\bar{f}'(\xi))=0,$$

also

$$-\frac{n^2-1}{3}|f'(\xi)|^2=\sum_{\nu=1}^{n-1}(-1)^\nu\operatorname{ctg}^2\frac{\nu\pi}{2n}\Re\left(\bar{f}'(\xi)f'\left(\xi\cos\frac{\nu\pi}{n}\right)\right).$$

Hieraus folgt

$$(12)\qquad \frac{n^2-1}{3}|f'(\xi)|\leqq\sum_{\nu=1}^{n-1}\operatorname{ctg}^2\frac{\nu\pi}{2n}\left|f'\left(\xi\cos\frac{\nu\pi}{n}\right)\right|.$$

Ist hierbei insbesondere $-1\leqq\xi\leqq 1$, so wird wegen (3)

$$\left|f'\left(\xi\cos\frac{\nu\pi}{n}\right)\right|\leqq\frac{Mn}{\sqrt{1-\xi^2\cos^2\frac{\nu\pi}{n}}}\leqq\frac{Mn}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\nu\pi}{n}}}=\frac{Mn}{\sin\frac{\nu\pi}{n}}.$$

s (12) folgt daher

$$|f'(\xi)| \leqq \frac{3Mn}{2(n^2-1)} \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\cos\frac{\nu\pi}{2n}}{\left(\sin\frac{\nu\pi}{2n}\right)^3}.$$

nun, wie man leicht zeigt, für $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

$$\varphi^3 \cos\varphi < \sin^3\varphi$$

so erhalten wir

$$|f'(\xi)| < \frac{12}{\pi^3} \cdot \frac{Mn^4}{n^2-1} \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu^3}.$$

r $n = 3$ liefert dies

$$|f'(\xi)| < 9M \cdot \frac{243}{16\pi^3} = 9M \cdot 0{,}486\ldots$$

l für $n \geqq 4$

$$|f'(\xi)| < Mn^2 \cdot \frac{12n^2}{\pi^3(n^2-1)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^3} \leqq Mn^2 \cdot \frac{12 \cdot 16}{15\pi^3} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^3} = Mn^2 \cdot 0{,}496\ldots$$

e zu beweisende Ungleichung (9) ist also in allen Fällen richtig.

Bedeutet M' das größte im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ liegende relative ximum von $|f'(x)|$ und m_n die obere Grenze der Zahlen $\frac{M'}{Mn^2}$ für alle lynome des Grades n, so ergibt sich genauer

$$\mu = \limsup_{n=\infty} m_n \leqq \frac{12}{\pi^3} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^3} = 0{,}465\ldots.$$

zt man ferner insbesondere $f(x) = T_n(x)$, so wird $|f'(x)|$ an den den Endpunkten des Intervalls $\cos\frac{2\pi}{n} \leqq x \leqq \cos\frac{\pi}{n}$ gleich Null und be- t demnach im Innern dieses Intervalls ein Maximum. Für jedes feste ψ schen 0 und π ist daher

$$m_n \geqq \frac{1}{n^2}\left|T_n'\left(\cos\frac{\pi+\psi}{n}\right)\right| = \frac{\sin\psi}{n\sin\frac{\pi+\psi}{n}}$$

l folglich

$$\mu \geqq \lim_{n=\infty} \frac{\sin\psi}{n\sin\frac{\pi+\psi}{n}} = \frac{\sin\psi}{\pi+\psi}$$

s Maximum dieser Funktion von ψ im Intervall $0 \leqq \psi \leqq \pi$ ist gleich $\psi_0 = 0{,}217\ldots$, wo ψ_0 die diesem Intervall angehörende Lösung der ichung $\operatorname{tg}\psi = \pi + \psi$ bedeutet. Wir erhalten also

$$0{,}217\ldots \leqq \mu \leqq 0{,}465\ldots.$$

e genauere Abschätzung dieser Konstanten μ dürfte nicht leicht sein.

§ 3.

Über Polynome, die an einem Endpunkt des zu betrachtenden Intervalls verschwinden.

Daß wir uns bis jetzt auf die Betrachtung des Intervalls $(-1, 1)$ beschränkt haben, ist natürlich ohne Bedeutung. Für ein beliebiges endliches Intervall (a, b) lautet der A. Markoffsche Satz in unserer präziseren Fassung folgendermaßen: Ist $f(x)$ ein Polynom des Grades n und

$$\text{Max}\,(|f|;\ a, b) = M,$$

so wird stets

$$|f'(a)| \leqq \frac{2Mn^2}{b-a}, \qquad |f'(b)| \leqq \frac{2Mn^2}{b-a},$$

wobei das Gleichheitszeichen auszuschließen ist, wenn $f(x)$ nicht von der Form

$$f(x) = \text{const.}\, T_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)$$

ist. Besitzt ferner $f'(x)$ an einer Stelle ξ des Intervalls (a, b) ein Maximum, so wird

$$|f'(\xi)| < \frac{Mn^2}{b-a}. \tag{13}$$

Auf Grund dieses Satzes läßt sich der A. Markoffsche Satz noch in folgender Weise ergänzen:

II. *Ist $f(x)$ ein Polynom des Grades n, das an einem der beiden Endpunkte des Intervalls $a \leqq x \leqq b$ verschwindet, so ist stets*

$$\text{Max}\,(|f'|;\ a, b) \leqq \frac{2n^2}{b-a}\cos^2\frac{\pi}{4n}\cdot\text{Max}\,(|f|;\ a, b)$$

und es gibt auch Polynome $f(x)$ dieser Art, für die hier das Gleichheitszeichen gilt.

Es genügt offenbar, den Beweis für irgendein spezielles Intervall (a, b) zu erbringen, und hier empfiehlt es sich $a = 0, b = 1$ zu wählen. Außerdem können wir uns auf den Fall

$$f(0) = 0, \quad \text{Max}\,(|f|;\ 0, 1) = 1 \tag{14}$$

beschränken und $n > 1$ annehmen[5]). Wir haben nun zu zeigen, daß also dann für $0 \leqq x \leqq 1$

$$|f'(x)| \leqq 2n^2\cos^2\frac{\pi}{4n} \tag{15}$$

[5]) Für $n = 1$ kommt hier nur der Fall $f(x) = e^{i\alpha}x$ in Betracht, der $|f'(x)| = 1 = 2\cdot 1^2\cos^2\frac{\pi}{4}$ führt.

rd. Ein spezielles Polynom n-ten Grades, das den Bedingungen (14) ıügt, ist insbesondere

$$U_n(x) = T_n\left(2\cos^2\frac{\pi}{2n}\cdot x - \cos\frac{\pi}{2n}\right) = T_n\left(\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}\right)x - \cos\frac{\pi}{2n}\right).$$

eser Ausdruck hat noch folgende Eigenschaften: An den n Stellen

$$\beta_\nu = \frac{\cos\frac{\nu\pi}{n} + \cos\frac{\pi}{2n}}{1+\cos\frac{\pi}{2n}} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

Intervalls $0 < x \leq 1$ wird $U_n(x)$ abwechselnd $+1$ und -1, außerdem wegen (1)

$$U_n'(0) = 2\cos^2\frac{\pi}{4n}\,T_n'\left(-\cos\frac{\pi}{2n}\right) = (-1)^{n-1}\,n\,\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n},$$

$$U_n'(1) = 2\cos^2\frac{\pi}{4n}\,T_n'(1) = 2n^2\cos^2\frac{\pi}{4n}.$$

Setzt man nun

$$h(x) = x(x-\beta_0)(x-\beta_1)\ldots(x-\beta_{n-1}) = xh_1(x),$$

folgt aus der Lagrangeschen Interpolationsformel

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{h(x)}{x-\beta_\nu}\,\frac{f(\beta_\nu)}{h'(\beta_\nu)} = x\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{h_1(x)}{x-\beta_\nu}\,\frac{f(\beta_\nu)}{h'(\beta_\nu)}.$$

$f(x) = U_n(x)$ läßt sich diese Gleichung wegen

$$\operatorname{sign} h'(\beta_\nu) = (-1)^\nu = U_n'(\beta_\nu)$$

besondere in der Form

$$U_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{h(x)}{x-\beta_\nu}\,\frac{1}{|h'(\beta_\nu)|} = x\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{h_1(x)}{x-\beta_\nu}\,\frac{1}{|h'(\beta_\nu)|}$$

reiben. Da nun die Ableitungen der n Funktionen $\frac{h(x)}{x-\beta_\nu}$ alle ihre Null-len im Intervall $0 < x < 1$ besitzen, so sind sie für $x \leqq 0$ und für $\geqq 1$ von demselben Vorzeichen. Aus (17) und (18) folgt daher, daß diese Werte von x

$$|f^{(m)}(x)| \leqq \sum_{\nu=0}^{n-1}\left|\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{h(x)}{x-\beta_\nu}\right)\right|_{|h'(\beta_\nu)|}\frac{1}{} - |U_n^{(m)}(x)| \quad (m = 0, 1, \ldots, n)$$

Insbesondere wird

$$|f'(0)| \leqq n\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n}, \qquad |f'(1)| \leqq 2n^2\cos^2\frac{\pi}{4n},$$

hierbei ist die an zweiter Stelle stehende Schranke die größere, denn besagt nur, daß

$$2 \sin \frac{\pi}{4n} \cos \frac{\pi}{4n} = \sin \frac{\pi}{2n} > \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2n} = \frac{1}{n}$$

ist. Um nun zu erkennen, daß die zu beweisende Ungleichung (15) auch für $0 < x < 1$ richtig ist. brauchen wir nur zu zeigen, daß für $0 < \xi <$

$$|f'(\xi)| < 2n^2 \cos^2 \frac{\pi}{4n}$$

wird, sobald $|f'(x)$ an der Stelle $x = \xi$ ein Maximum besitzt. Dies folgt aber aus (13), weil in unserem Falle

$$\frac{Mn^2}{b-a} = n^2 = 2n^2 \cos^2 \frac{\pi}{4} < 2n^2 \cos^2 \frac{\pi}{4n}$$

ist.

Diese Betrachtung zeigt auch, daß für ein Polynom $f(x)$ des Grades $n > 1$, das den Bedingungen (14) genügt, in der Ungleichung (15) das Gleichheitszeichen nur für $x = 1$ stehen kann. Ferner tritt dies nur dann ein. wenn für $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$

$$f(\beta_\nu) = e^{i\alpha} \operatorname{sign} h'(\beta_\nu) = e^{i\alpha} U_n(\beta_\nu) \qquad (\alpha \text{ reell}$$

wird, d. h. wenn $f(x)$ von der Form $e^{i\alpha} U_n(x)$ ist.

§ 4.

Fortsetzung.

Die Formeln (17) und (18) gestatten uns, noch einen weiteren interessanten Satz abzuleiten:

III. *Für jedes Polynom*

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

das an der Stelle $x = 0$ *verschwindet und der Bedingung* $\operatorname{Max}(|f|; 0, 1) =$ *genügt, ist*

$$|a_0| \leqq 2^{2n-1} \left(\cos \frac{\pi}{4n}\right)^{2n} \tag{20}$$

und für $0 \leqq x \leqq 1$

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqq n \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4n}. \tag{21}$$

In diesen beiden Ungleichungen sind die Gleichheitszeichen auszuschließen, wenn $f(x)$ *nicht von der Form* $e^{i\alpha} U_n(x)$ *ist, und auch in diesem Fall gilt in* (21) *das Gleichheitszeichen nur für* $x = 0$[6]).

Die Ungleichung (20) ergibt sich unmittelbar aus (19), indem man hierin $m = n$ setzt. Um (21) zu beweisen, setze man (vgl. Formel (16

[6]) Unter $\frac{f(x)}{x}$ ist hierbei. wie überall im folgenden die zugehörige ganze rationale Funktion zu verstehen

$$\beta = \beta_{n-1} = \frac{\cos\frac{\pi}{2n} - \cos\frac{\pi}{n}}{1+\cos\frac{\pi}{2n}} = \frac{\sin\frac{3\pi}{4n}\sin\frac{\pi}{4n}}{\cos^2\frac{\pi}{4n}}.$$

ann wird für $\beta \leqq x \leqq 1$

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqq \frac{1}{\beta} = \frac{\cos\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{3\pi}{4n}} \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n} < \frac{1}{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{3\pi}{4n}} \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n} = \tfrac{2}{3}\, n \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n},$$

daß also (21) gewiß richtig ist. Für $x < \beta$ sind aber die in (17) ftretenden n Ausdrücke $\frac{h_1(x)}{x-\beta_\nu}$, da β die kleinste Nullstelle von $h_1(x)$, von demselben Vorzeichen. Daher folgt aus (17) und (18)

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqq \sum_{\nu=0}^{n-1} \left|\frac{h_1(x)}{x-\beta_\nu}\right| \frac{1}{|h'(\beta_\nu)|} = \left|\frac{U_n(x)}{x}\right|,$$

obei das Gleichheitszeichen nur für $f(x) = e^{i\alpha} U_n(x)$ gilt. Da nun

$$\lim_{x=0}\left|\frac{U_n(x)}{x}\right| = |U_n'(0)| = n \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n}$$

, so haben wir nur noch zu zeigen, daß für $0 < x < \beta$

2) $$|U_n(x)| < x\, n \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n}$$

. Setzt man

$$x = \frac{-\cos\varphi + \cos\frac{\pi}{2n}}{1+\cos\frac{\pi}{2n}}, \quad \text{also} \quad U_n(x) = T_n(-\cos\varphi) = (-1)^n \cos n\varphi,$$

besagt (22) nur, daß für $\frac{\pi}{2n} < \varphi < \frac{\pi}{n}$

$$F(\varphi) = n\left(\cos\frac{\pi}{2n} - \cos\varphi\right) + \sin\frac{\pi}{2n}\cos n\varphi > 0$$

. Dies ist aber gewiß richtig, weil $F(\varphi)$ und $F'(\varphi)$ für $\varphi = \frac{\pi}{2n}$ verhwinden und

$$F''(\varphi) = n\cos\varphi - n^2 \sin\frac{\pi}{2n}\cos n\varphi$$

dem Intervall $\frac{\pi}{2n} < \varphi < \frac{\pi}{n}$ positiv ist.

Beachtet man, daß die Sätze II und III auch für Polynome mit mplexen Koeffizienten gelten, so ergibt sich allgemeiner:

III* *Es sei $z = z_0$ eine reelle oder komplexe Nullstelle des Polynoms*

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

d z_1 eine beliebige andere Stelle in der z-Ebene. Ist für alle Punkte z

auf der geradlinigen Verbindungsstrecke der Punkte z_0 und z_1 der absolute Betrag von $f(z)$ höchstens gleich M, so ist für diese Werte von z

$$\left|\frac{f(z)}{z-z_0}\right| \leqq \frac{M}{|z_1-z_0|} \cdot n \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4n}, \qquad |f'(z)| \leqq \frac{M}{|z_1-z_0|} \cdot 2n^2 \cos^2 \frac{\pi}{4n}.$$

Ferner ist

$$|a_0| \leqq \frac{M}{|z_1-z_0|^n} \cdot 2^{2n-1} \left(\cos \frac{\pi}{4n}\right)^{2n}.$$

Das Gleichheitszeichen ist in diesen Ungleichungen auszuschließen, wenn $f(z)$ nicht von der Form

$$\text{const.}\, T_n\left(2 \cos^2 \frac{\pi}{4n} \cdot \frac{z-z_0}{z_1-z_0} - \cos \frac{\pi}{2n}\right)$$

ist.

§ 5.

Über Polynome, die an den beiden Endpunkten eines Intervalls verschwinden.

IV. *Für jedes Polynom des Grades $n \geqq 2$*

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

das an den Stellen $x = 0$ und $x = 1$ verschwindet und der Bedingung $\operatorname{Max}(|f|; 0, 1) = 1$ *genügt, ist*

$$|a_0| \leqq 2^{2n-1} \left(\cos \frac{\pi}{2n}\right)^n, \tag{23}$$ [7])

ferner ist für $0 \leqq x \leqq 1$

$$|f'(x)| \leqq 2n \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}, \qquad \left|\frac{f(x)}{x(x-1)}\right| \leqq 2n \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} \tag{24}$$

In diesen Ungleichungen ist das Gleichheitszeichen auszuschließen, wenn $f(x)$ nicht die Form $e^{i\alpha} V_n(x)$ hat; hierbei ist

$$V_n(x) = T_n\left(\cos \frac{\pi}{2n}(2x-1)\right)$$

zu setzen.

Der Beweis ergibt sich ganz ähnlich wie in den Paragraphen 3 und 4. Setzen wir hier

$$\gamma_\nu = \frac{\cos \frac{\nu\pi}{n} + \cos \frac{\pi}{2n}}{2 \cos \frac{\pi}{2n}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1$$

---

[7]) Für Polynome mit reellen Koeffizienten findet sich diese Ungleichung schon bei Tschebyschef, „Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes“, Werke Bd. I, S. 111—143 S. 139.

d

$k(x) = x(x-1)(x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\dots(x-\gamma_{n-1}) = x(x-1)\,k_1(x),$

wird

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{k(x)}{x-\gamma_\nu} \frac{f(\gamma_\nu)}{k'(\gamma_\nu)} = x(x-1) \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{k_1(x)}{x-\gamma_\nu} \frac{f(\gamma_\nu)}{k'(\gamma_\nu)}$$

d speziell, weil

$$\operatorname{sign} k'(\gamma_\nu) = (-1)^\nu = V_n(\gamma_\nu)$$

$$V_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{k(x)}{x-\gamma_\nu} \frac{1}{|k'(\gamma_\nu)|} = x(x-1) \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{k_1(x)}{x-\gamma_\nu} \frac{1}{|k'(\gamma_\nu)|}.$$

eraus folgt wieder für $x \leqq 0$ und $x \geqq 1$

$$|V_n^{(m)}(x)| \leqq \sum_{\nu=1}^{n-1} \left| \frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{k(x)}{x-\gamma_\nu}\right)\right| \frac{1}{|k'(\gamma_\nu)|} = \left|V_n^{(m)}(x)\right| \quad (m = 0, 1, \dots, n),$$

s für $m = n$ insbesondere die Ungleichung (23) liefert. Da ferner

$$V_n'(1) = (-1)^{n-1} V_n'(1) = (-1)^{n-1} \cdot 2\cos\frac{\pi}{2n}\, T_n'\left(\cos\frac{\pi}{2n}\right) = (-1)^{n-1} \cdot 2n \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$$

so erhalten wir

$$|f'(0)| \leqq 2n \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}, \qquad |f'(1)| \leqq 2n \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}.$$

ß die erste der Ungleichungen (24) auch für $0 < x < 1$ gilt, folgt eder, indem man beachtet, daß an jeder Stelle ξ dieses Intervalls, an $f'(x)|$ ein Maximum erreicht, wegen

$$|f'(\xi)| < n^2 = n^2 \cdot \tfrac{2}{2} \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2\cdot 2} \leqq n^2 \cdot \frac{2}{n} \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$$

Die hierbei benutzte Ungleichung für $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$ ist gewiß richtig, da $\operatorname{ctg}\varphi$ im Intervall $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ beständig abnimmt.

Beim Beweis der zweiten unter den Ungleichungen (24) können wir s offenbar auf das Intervall $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ beschränken und $n > 2$ annehmen. zt man

$$\gamma = \gamma_{n-1} = \tfrac{1}{2} - \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{2\cos\frac{\pi}{2n}},$$

wird für $\gamma \leqq x \leqq \frac{1}{2}$

$$\left|\frac{f(x)}{x(x-1)}\right| \leqq \frac{1}{\gamma(1-\gamma)} = \frac{4\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{3\pi}{2n}} \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n} < \frac{4}{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{3\pi}{2n}} \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n} = \tfrac{2}{3}\cdot n \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}.$$

Für $0 \leqq x < \gamma$ sind aber, weil γ die kleinste Nullstelle von $k_1(x)$ ist, di $n-1$ Ausdrücke $\frac{k_1(x)}{x-\gamma_\nu}$ von demselben Vorzeichen. Aus (25) und (27 folgt daher

$$\left|\frac{f(x)}{x(x-1)}\right| \leqq \left|\frac{V_n(x)}{x(x-1)}\right|.$$

Wir haben also nur noch zu zeigen, daß für $0 \leqq x \leqq \gamma$

$$\left|\frac{V_n(x)}{x(x-1)}\right| \leqq 2n \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} \tag{28}$$

ist. Für $x = 0$ ist hier das Gleichheitszeichen zu setzen, für $0 < x <$ geht (28) durch die Substitution

$$x = \frac{-\cos\varphi + \cos\frac{\pi}{2n}}{2\cos\frac{\pi}{2n}} \qquad \left(\frac{\pi}{2n} < \varphi < \frac{\pi}{n}\right)$$

in die Ungleichung

$$-\frac{4\cos n\varphi \cos^2\frac{\pi}{2n}}{\cos^2\frac{\pi}{2n} - \cos^2\varphi} < 2n \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$$

über, die nur besagt, daß

$$G(\varphi) = \sin\frac{\pi}{n}\cos n\varphi + n\left(\cos^2\frac{\pi}{2n} - \cos^2\varphi\right)$$

im Intervall $\frac{\pi}{2n} < \varphi < \frac{\pi}{n}$ stets positiv ist. Dies ist aber gewiß richti denn für $n = 3$ wird

$$G(\varphi) = 4\cos\frac{\pi}{6}\left(\cos^2\frac{\pi}{6} - \cos^2\varphi\right)\left(\cos\frac{\pi}{6} - \cos\varphi\right)$$

und für $n > 3$ ist $G\left(\frac{\pi}{2n}\right) = G'\left(\frac{\pi}{2n}\right) = 0$ und, solange φ zwischen $\frac{\pi}{2n}$ ur $\frac{\pi}{n}$ bleibt,

$$G''(\varphi) = -n^2\sin\frac{\pi}{n}\cos n\varphi + 2n\cos 2\varphi > 0.$$

Bei dieser Betrachtung ergibt sich zugleich, daß das Gleichheitszeichen einer der Ungleichungen (23) und (24) nur dann stehen kann, wenn d $n-1$ Ausdrücke $f(\gamma_\nu)$ sich von den entsprechenden Zahlen (26) nur u einen konstanten Faktor vom absoluten Betrage 1 unterscheiden, d. wenn $f(x)$ von der Form $e^{i\alpha}V_n(x)$ ist. Ist $n > 2$, so gehen genau auch in diesem speziellen Fall die Ungleichungen (24) nur für $x = 0$ u $x = 1$ in Gleichungen über.

Aus dem Satze IV folgt wieder allgemeiner:

IV*. *Sind z_0 und z_1 zwei reelle oder komplexe Wurzeln der Gleichu*

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

l ist auf der geradlinigen Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte $z)| \leqq M$, *so ist für alle Punkte auf dieser Strecke*

$$(z)| \leqq \frac{M}{|z_1 - z_0|} \cdot 2n \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}, \qquad \left|\frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_1)}\right| \leqq \frac{M}{|z_1 - z_0|^2} \cdot 2n \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n},$$

ner ist

$$|a_0| \leqq \frac{2^{2n-1}}{|z_1 - z_0|^n} \left(\cos \frac{\pi}{2n}\right)^n.$$

allen diesen Ungleichungen ist das Gleichheitszeichen auszuschließen, *n* $f(z)$ *nicht von der Form*

$$\text{const. } T_n\left(\frac{2z - z_0 - z_1}{z_1 - z_0} \cdot \cos \frac{\pi}{2n}\right)$$

§ 6.

Über Polynome, die im Mittelpunkt eines Intervalls verschwinden.

Der Vollständigkeit halber will ich noch auf einen weiteren Fall aufrksam machen, der sich in ähnlicher Weise erledigen läßt.

V. *Es sei* $f(x)$ *ein Polynom des Grades* $n > 2$, *das an der Stelle* $= 0$ *verschwindet und der Bedingung* $\operatorname{Max}(|f; -1, 1) = 1$ *genügt.* *nn ist für* $-1 \leqq x \leqq 1$

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqq m,$$

bei m gleich $n-1$ *oder gleich n zu setzen ist, je nachdem n gerade r ungerade ist. Nur dann, wenn n ungerade und* $f(x) = e^{i\alpha} T_n(x)$ *ist,* *an in* (29) *das Gleichheitszeichen stehen, und zwar allein für* $x = 0$. *er auch für ein gerades n kann in* (29), *solange* $f(x)$ *keiner weiteren dingung unterworfen wird, die obere Schranke m durch keine kleinere hl ersetzt werden.*

Setzt man

$$= \cos \frac{\mu\pi}{m}, \quad l(x) = x(x^2 - 1) T_m'(x) = 2^{n-1} n x \prod_{\mu=0}^{m} (x - \alpha_\mu) = x\, l_1(x),$$

wird sowohl für gerade als auch für ungerade Werte von n

$$f(x) = \sum_{\mu=0}^{m} \frac{l(x)}{x - \alpha_\mu} \cdot \frac{f(\alpha_\mu)}{l'(\alpha_\mu)}.$$

se Formel gilt insbesondere auch für $f(x) = T_m(x)$, weil $T_m(x)$ für gerades m an der Stelle $x = 0$ verschwindet. Nun ist aber, wenn σ_μ Vorzeichen von α_μ bedeutet,

$$T_m(\alpha_\mu) = (-1)^\mu = \operatorname{sign} l_1'(\alpha_\mu) = \sigma_\mu \cdot \operatorname{sign} l'(\alpha_\mu).$$

Aus (30) folgt daher

$$T_m(x) = \sum_{\mu=0}^{m} \frac{l(x)}{x-\alpha_\mu} \cdot \frac{\sigma_\mu}{|l'(\alpha_\mu)|}. \tag{31}$$

Setzt man

$$\alpha = \alpha_{\frac{m-1}{2}} = \cos\frac{(m-1)\pi}{2m} = \sin\frac{\pi}{2m},$$

so sind $-\alpha$ und α die absolut kleinsten unter den Zahlen α_μ. Hieraus folgt leicht, daß für $-\alpha < x < 0$ und für $0 < x < \alpha$

$$\operatorname{sign}\frac{l(x)}{x-\alpha_\mu} = (-1)^{\frac{m-1}{2}}\sigma_\mu \operatorname{sign} x$$

ist. Für diese Werte von x (und also auch für $x=0$) ergibt sich daher aus (30) und (31)

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqq \sum_{\mu=0}^{m}\left|\frac{l_1(x)}{x-\alpha_\mu}\right| \frac{1}{|l'(\alpha_\mu)|} = (-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{T_m(x)}{x} = \left|\frac{T_m(x)}{x}\right|. \tag{32}$$

Setzt man nun $x = \sin\varphi$, so wird $T_m(x) = \cos m\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}}\sin m\varphi$ und wir erhalten für $-\alpha < x < \alpha$, d. h. für $-\frac{\pi}{2m} < \varphi < \frac{\pi}{2m}$

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqq \left|\frac{\sin m\varphi}{\sin\varphi}\right| \leqq m. \tag{33}$$

Ist ferner $\alpha \leqq |x| \leqq 1$, so wird

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqq \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2m}} < \frac{1}{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2m}} = m.$$

Damit ist die Ungleichung (29) für das ganze Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ bewiesen. Das Gleichheitszeichen kommt hierbei nur dann in Betracht, wenn es in (32) und (33) überall gilt. Dann muß aber $x=0$ sein und außerdem müssen sich die $m+1$ Zahlen $f(\alpha_\mu)$ von den entsprechenden Zahlen $T_m(\alpha_\mu)$ nur um einen Faktor der Form $e^{i\alpha}$ unterscheiden. Da hierzu noch $f(0) = T_m(0) = 0$ hinzukommt, so muß der Grad n von $f(x)$ gleich m und $f(x) = e^{i\alpha}T_m(x)$ sein. Für ein gerades $n > 2$ ist also in (29) das Gleichheitszeichen auszuschließen[8]). Setzt man aber, wenn ε irgendeine positive Zahl bedeutet,

$$f(x) = \frac{1+\varepsilon x}{1+\varepsilon} T_m(x),$$

so wird

$$\lim_{x=0}\left|\frac{f(x)}{x}\right| = \frac{m}{1+\varepsilon},$$

[8]) Die Ungleichung (29) ist auch für $n=2$ richtig, hierbei kann aber, wenn $x = \pm 1$ ist, das Gleichheitszeichen gelten.

l da dieser Ausdruck dem Werte m beliebig nahe gebracht werden n, so läßt sich in (29) auch für ein gerades n die obere Schranke m ch keine kleinere Zahl ersetzen.

In ähnlicher Weise wie in den früheren Fällen können wir aus V emeiner schließen:

V*. *Es sei $f(z)$ ein Polynom n-ten Grades, das an der Stelle z_0 schwindet. Sind z_1 und z_2 zwei in bezug auf z_0 symmetrisch gelegene nkte, und ist auf der geradlinigen Strecke, die z_1 und z_2 verbindet, $z)| \leqq M$, so ist für diese Werte von z*

$$\left|\frac{f(z)}{z-z_0}\right| \leqq M(n-1) \quad \text{oder} \quad \left|\frac{f(z)}{z-z_0}\right| \leqq M n,$$

nachdem n gerade oder ungerade ist. Für $n > 2$ gilt hierbei das ichheitszeichen nur dann, wenn n ungerade, $z - z_0$ und $f(z)$ von der rm const. $T_n\left(\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right)$ *ist.*

(Eingegangen am 11. Januar 1919.)

Das Frobeniussche Kappendreieck und die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises.

Von

Heinrich Liebmann in München.

„Jede große geometrische Wahrheit ist im Grunde einfach und dah leicht zu beweisen; wenn viele dies noch nicht sind, so stehen sie noc nicht in ihrem naturgemäßen Zusammenhang." Diese Bemerkung ga auch bis in die jüngste Zeit für die isoperimetrische Haupteigenschaft d Kreises, daß er unter allen Kurven mit gegebenem Umfang (L) den größte Inhalt (F) besitzt. Frobenius, so dürfen wir sagen, hat das Ziel e reicht in seiner Arbeit „Über den gemischten Flächeninhalt zweier Ovale (Berl. Berichte 28 (1915), S. 387—404), aber er hat es doch wieder ve schleiert durch eine einschränkende Bemerkung, wonach eine gewisse qu dratische Form in zwei Veränderlichen bei Extrapolation außerhalb ihr ursprünglichen Definitionsbereiches „nicht mehr dieselbe geometrische B deutung hat". Ohne hier auf den Sinn dieses irreführenden Vorbehalt einzugehen, wollen wir nur vorab bemerken, daß sich bei entsprechend Fassung gerade aus dem frei zu verwendenden Grundgedanken vo Frobenius heraus ein Beweis für die isoperimetrische Haupteigenscha des Kreises entwickeln läßt, *der bis ins einzelne hinein die volle An schaulichkeit bewahrt, ohne die bindende Kraft der Schlüsse einzubüße*

Dieses eben zu zeigen, ist unser Ziel.

Die Eigenschaft des Kreises, unter allen Eilinien — von andern, nich konvexen Kurven, kann man bekanntlich absehen — mit gegebenem Um fang (L) den größten Flächeninhalt (F) zu besitzen [1]), liegt bekanntlic in der Ungleichheit

$$L^2 - 4\pi F \geqq 0,$$

in der nur für den Kreis das Gleichheitszeichen besteht.

[1]) Geschichte und Systematik dieser Frage findet man nahezu vollständig b W. Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig 1916.

Es ist auch bekannt, daß die durch „Dilatation“ aus einer Eilinie vorgehenden Parallelkurven, die man erhält, wenn man auf allen Nor- len die Strecke t abträgt, nach Umfang und Inhalt durch

$$L(t) = L + 2t\pi,$$
$$F(t) = F + tL + t^2\pi$$

eben sind[2]). Dabei ist t positiv im Sinne der äußeren, negativ im ne der inneren Normale gerechnet, und hinsichtlich des *Vorzeichens* $F(t)$ gilt die Regel: Man lasse P die Eilinie im positiven Sinne chlaufen und den zugeordneten Punkt $P(t)$ die Parallelkurve. Ist t itiv, dann durchläuft $P(t)$ die (äußere) Parallelkurve so, daß der Inhalt Linken bleibt, also durchweg positiv; bei inneren Parallelkurven gativem t) aber kann es vorkommen, daß die Bahn von $P(t)$ sich rschneidet und die einzelnen Flächenstücke teils positiv, teils negativ laufen werden; $F(t)$ gibt dann die algebraische Summe.

Die Formel zeigt, daß $F(t)$ bei geeigneter Wahl von t negativ ge- cht werden kann dann und nur dann, wenn eben

$$L^2 - 4\pi F > 0.$$

Unser Ziel ist demnach erreicht, wenn wir erwiesen haben, daß der is die einzige Eilinie ist, zu der es keine Parallelkurven mit negativem alt gibt.

Für die Ellipse mit den Halbachsen a und b kann man unmittelbar en, daß die durch $t = -a$, $t = -b$ gegebenen beiden Parallelkurven ativen Inhalt haben; sie bestehen eben lediglich aus Teilen, die von t) negativ umlaufen werden.

Zur Beantwortung der Frage für allgemeine Eilinien hat Frobenius ch seine Einführung des „Kappendreiecks“ den Weg gebahnt, statt des gweisers aber eine Warnungstafel errichtet.

Wir werden, den Grundlinien seiner Betrachtung folgend, als Antwort Satz finden:

Zieht man zu einer Eilinie die (innere) Parallelkurve, indem man allen Normalen die Strecke

$$t = -\varrho^*$$

---

[2]) Es ist also

$$(L(t))^2 - 4\pi F(t) = (L + 2t\pi)^2 - 4\pi(F + tL + t^2\pi) = L^2 - 4\pi F$$

Invariante (*Integralinvariante*) bei der Gruppe der Dilatationen. Eine weiter- ende Untersuchung über „Integralinvarianten und isoperimetrische Probleme“ er- en in den Berichten der K. Bayer. Akademie 1918, S. 489–505.

abträgt, wobei ϱ^* der Radius des Inkreises irgendeines Kappendreiecks das heißt eines die Kurve umschließenden Tangentendreiecks ist, so ist

$$F(-\varrho^*) \leqq 0.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für den Kreis.

Der weitere Gedankengang mag zuerst für konvexe Vierecke, dann allgemein für konvexe n-Ecke durch Betrachtung von Prismatoiden (Obelisken), dann für Eilinien durch Betrachtung gewisser Hüllflächen von Ebenen, die wir „Hufe" nennen wollen, durchgeführt werden. Nimmt man für die Hüllflächen dann speziell „Böschungsflächen", so kommt man zu dem ausgesprochenen Satz.

Wir beginnen also mit dem vierseitigen Prismatoid (Fig. 1), das von zwei Vierecken, nämlich der im Sinne der Buchstabenfolge positiv umlaufenen Deckfläche $ABCD$ und der Grundfläche $A'B'C'D'$ mit entsprechend gleichsinnig parallelen Seiten, außerdem vier Paralleltrapezen begrenzt ist. Wir nehmen an, daß $B'A$ und CD einander in E, $B'A$ und $C'D'$ einander in E' schneiden. (Wenn Grund- und Deckfläche Parallelogramme sein sollten, braucht man keinen Grenzübergang auszuführen, kann vielmehr die Betrachtung auf den allgemeineren Fall des Fünfecks zurückführen, indem man zur Ergänzung noch ein Paar parallele Stützgeraden durch zwei zugeordnete Ecken einführt.) Auf diese Weise entstehen die beiden positiv umlaufenen „Kappendreiecke" EBC und $E'B'C'$, und die Vierecke erscheinen als Differenzen dieser Kappendreiecke und der „Restdreiecke" EAD und $E'A'D'$.

Die beiden Kappendreiecke sind Horizontalschnitte der „Kappenpyramide" $B'C'E'S$, in deren Spitze die Verlängerungen der Strecken $B'B$, $C'C$, $E'E$ einander schneiden. Durch S legen wir jetzt eine Horizontalebene und betrachten ihren Schnitt mit den verlängerten Prismatoidkanten. Die Schnittpunkte sind

$$A^*,\ D^*,\ B^* \equiv C^* \equiv S$$

und den Schnitt mit $E'E$ ist

$$E^* \equiv S.$$

Für den Inhalt des Querschnitts erhält man also

$$\Delta E^*B^*C^* - \Delta E^*A^*D^* = 0 - \Delta SA^*D^* < 0.$$

(Man beachte, daß der Umlauf SA^*D^* stets *positiv* ist!)

Hieraus folgt, zunächst für unser vierseitiges Prismatoid, daß sich unter seinen Querschnitten auch solche mit *negativem* Inhalt befinden, wenn nicht auch A^* und D^* in S liegen, d. h. *wenn es kein Pyramidenstumpf ist.*

Diese Überlegung gilt allgemein für Prismatoide. Es sei $A_1, A_2, \ldots, A_n$ konvexes, im Sinn der Buchstabenfolge positiv umlaufenes Polygon einer Horizontalebene. Es sei $A_1', A_2', \ldots, A_n'$ ein zweites konvexes Polygon, dessen Seiten den entsprechenden des ersten gleichsinnig parallel sind. Wir stellen wieder durch Verbindung entsprechender Ecken ein Prismatoid her, dessen Kanten wir verlängern.

Wir behaupten:

Das verlängerte Prismatoid hat unter seinen Horizontalschnitten auch solche mit negativem Inhalt, wenn die Kanten $A_\nu A_\nu'$ nicht sämtlich durch einen und denselben Punkt S hindurchgehen.

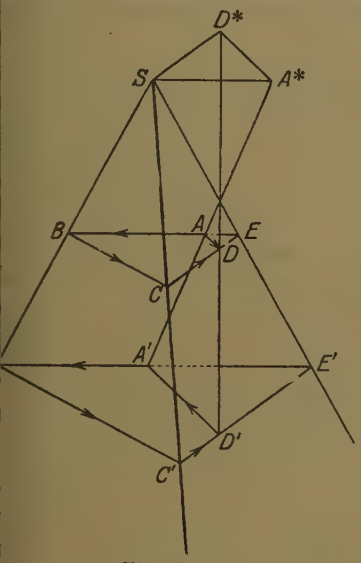

Fig. 1.

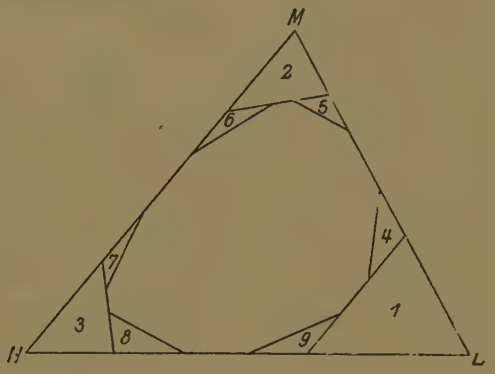

Fig. 2.

Der „archimedische Punkt" des Beweises ist wieder diese Spitze einer Kappenpyramide. Man verlängere drei Paare entsprechender, gleichsinnig paralleler Kanten von Grund- und Deckfläche, um zunächst zwei „Kappenecke" $L'M'N$ und LMN zu erhalten; die Strecken $L'L$, $M'M$, $N'N$ sind wieder bis zum Schnittpunkt S zu verlängern. Die Polygone erscheinen jetzt als „Kerne", die übrig bleiben, wenn man von den Kappendreiecken (s. Fig. 2) „Restdreiecke" $k_1, k_2, \ldots$ bzw. $k_1', k_2', \ldots$ mit entsprechend parallelen Seiten abschneidet. Die Figur deutet die Legung der Schnitte an. Verlängert man die Verbindungsstrecken aller entsprechenden Ecken der Restdreiecke und damit der Polygone bis zur Horizontalebene durch die Spitze S der Kappenpyramide, so entstehen Dreiecke $k_1^*, k_2^*, \ldots, k_n^*$, von denen keines einen negativen Inhalt hat. Der Inhalt des Horizontalschnittes des verlängerten Prismatoides, dessen Ebene S enthält, ist dann

$$0 - k_1^* - k_2^* - \ldots - k_n^* \leqq 0,$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn *alle* k_ν^* den Inhalt Null haben, also sich auf Punkte reduzieren. k_1^*, k_2^* und k_3^* sind aber dann und nur dann auf Punkte reduziert, wenn die Paare $k_1 k_1'$, $k_2 k_2'$, $k_3 k_3'$ ihr Perspektivitätszentrum in S haben. Hieran schließt sich dann der nächste innere Dreieckskranz, hier die Indizesfolge $4-9$, usw., man sieht, daß eben diese Dreiecke $k_4^* \ldots k_9^*$ auch nur dann den Inhalt Null haben, wenn die Verbindungslinien entsprechender Ecken durch S gehen. Setzt man dieses Verfahren fort, das im Wort sich viel schwerfälliger macht als für den Blick, so erkennt man, daß jener Querschnitt des verlängerten Prismatoides nur dann den Inhalt Null hat, wenn alle $A_\nu A_\nu'$ durch S laufen, das Prismatoid also ein Pyramidenstumpf ist.

Vom Prismatoid ist nur ein Schritt — einer der wenigen Grenzübergänge, die keine neuen Methoden erfordern — zum „Huf".

Es seien in zwei Horizontalebenen die Eilinien E und E' gegeben, deren Peripherien wir mit den Pfeilen positiven Umlaufs versehen. Die Gesamtheit der Tangentialebenen, welche E und E' gleichsinnig berühren, umhüllen dann die „Hufffläche". Jede solche gemeinsame Tangential- oder Stützebene zerlegt den Raum in zwei Teile, deren einer E und E' enthält. Die geradlinigen Erzeugenden der Hufffläche verbinden „zugeordnete Punkte" der Eilinien E und E'. Sodann legen wir um E und E' zwei Kappendreiecke, d. h. umschriebene, E bzw. E' im Innern enthaltende Tangentendreiecke mit entsprechend gleichsinnig parallelen Seiten LM, MN, NL und $L'M'$, $M'N'$, $N'L'$. Genau wie im vorigen Fall können wir jetzt die Eiflächen als Kerne erhalten, die übrig bleiben, wenn man wieder von den beiden Kappendreiecken eine — jetzt unbegrenzte — Folge von paarweise perspektivisch gelegenen Restdreiecken k_ν, k_ν' abschneidet.

Ein bestimmtes Gesetz für die Auswahl dieser Folgen ist leicht anzugeben: k_1, k_2, k_3 und k_1', k_2', k_3' kann man so wählen, daß L, M, N und L', M', N' je eine Ecke ist, je zwei Seiten den von diesen Punkten ausgehenden Seiten des Kappendreiecks angehören, während die dritte Seite die auf der Halbierungslinie des betreffenden Winkels $\sphericalangle NLM$ usw. des Kappendreiecks senkrecht stehende Tangente oder Stützlinie der Eilinie ist. Es bleiben dann zwei Sechsecke als Kerne, und diese sind ganz entsprechend weiter zu behandeln.

Dann hat man genau wie früher die Kappenpyramide zu konstruieren, durch ihre Spitze S eine Horizontalebene zu legen und sie mit den Verbindungslinien entsprechender Ecken entsprechender zugeordneter Restdreiecke zum Schnitt zu bringen. Der Inhalt des Horizontalschnittes der Hufffläche, dessen Ebene S enthält, ist dann, genau wie oben

$$0 - k_1^* - k_2^* - \ldots - k_\nu^* - \ldots \leqq 0,$$

d das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn alle k_r^* sich auf Punkte redu-
ren. Daß diese Punkte dann alle in den einen Punkt S hineinfallen,
rd wieder schrittweise gezeigt, indem man mit $k_1 k_1'$, $k_2 k_2'$, $k_3 k_3'$ beginnt.

Es gilt also der Satz:

*Verlängert man die geradlinigen Erzeugenden eines durch zwei Ei-
ien in parallelen Ebenen bestimmten konvexen Hufmantels, so befinden
h unter den Horizontalschnitten auch Flächen mit negativem Inhalt,
nn die Eilinien nicht perspektivisch sind, also der Hufmantel kein
gelstumpf ist.*

Um von hier aus zum Beweis des oben ausgesprochenen Satzes zu
angen, brauchen wir nur E und E' in bestimmter Weise zu wählen.
r errichten über E die „Böschungsfläche" und zwar insbesondere die
llfläche der Ebenen, die mit den inneren Normalen von E den Winkel
einschließen. Die senkrechten Projektionen der Horizontalschnitte der
schungsfläche auf die Ebene von E sind dann einfach die Parallelkurven
E, und die (positive oder negative) Höhe des Horizontalschnittes über
Ebene von E ist der (negative oder positive) Abstand der Parallel-
ve: die oberen Horizontalschnitte ergeben innere, die unteren äußere
rallelkurven in der Projektion.

Für E' nehmen wir jetzt irgendeinen unteren Horizontalschnitt, er-
ten also dann als „Huffläche" in diesem Fall einfach wieder die
schungsfläche.

Konstruiert man wieder eine Kappenpyramide, so sind ihre drei Seiten-
hen unter dem Winkel $\frac{\pi}{4}$ gegen die Horizontalebene geneigt, und die
jektion des in der durch die Spitze S gehenden Horizontalebene ge-
enen Schnittes der Böschungsfläche hat *negativen* Inhalt. Sie ist eine
ere Parallelkurve, und ihr Abstand von der Eilinie ist gleich der Höhe
S über der Ebene von E. Der Fußpunkt der Höhe aber hat von
n drei Seiten LM, MN, NL des Kappendreiecks denselben Abstand
, ist also gleich dem Radius ϱ^* des Inkreises von LMN.

Damit ist der oben ausgesprochene Satz bewiesen, über dessen Aus-
en wir uns nun nochmals Rechenschaft geben wollen:

Umschreibt man einer Eilinie ein Tangentendreieck LMN (Kappen-
eck), so hat die innere Parallelkurve E^* im Abstand ϱ^* (gleich dem
lius des Inkreises von LMN) nur dann keinen negativen Inhalt, wenn
und E^* nicht perspektivisch liegen. In diesem besondern Fall aber
uziert sich E^* auf einen Punkt, also ist E dann ein Kreis.

Oder also: Es ist immer

$$L^2 - 4\pi F \geqq 0,$$

das Gleichheitszeichen tritt nur für den Fall des Kreises ein.

So sind wir, Schritt für Schritt geometrisch verfahrend, zum Ziel gelangt mit freier Verwendung des „Kappendreiecks" und der bei Frobenius nicht in dieser Weise für Eilinien konstruierten „Restdreiecke". Wir glauben damit eine Pflicht des Dankes zu erfüllen, gegenüber und zu Ehren von Frobenius[3]).

[3]) An Stelle dieses rein *anschaulichen* Beweises kann man, wie mir Herr Blaschke mitteilt, auch einen allen bisherigen gegenüber vereinfachten *analytischen* treten lassen durch geeignete Verwendung der von ihm und dann nochmals von Frobenius gegebenen Darstellung des Vierecksinhalts als Differenz des Quadrats zweier linearer Ausdrücke (D. Math. V. 23 (1914), S. 210—234.)

(Eingegangen am 17. Januar 1919.)

Aufstellung und Beweis des Drehungssatzes für schlichte konforme Abbildungen.

Von

Ludwig Bieberbach in Frankfurt a. M.

---

1. Der Koebesche Verzerrungssatz gibt eine Vorstellung über die ßstabänderung einer Figur, die einer schlichten konformen Abbildung erworfen wird. Er lehrt, daß der Maßstab der Abbildung nicht allzu rmisch von Ort zu Ort wechseln kann. Über die Stellungsänderung einzelnen Linienelemente, also die Verdrehung oder die Verbiegung, che die Figur bei der Abbildung erfährt, sagt der Satz nichts aus.

Aber erst eine Schätzung dieser Stellungsänderung zusammen mit der ätzung der Maßstabänderung würde es erlauben, den ganzen Habitus Bildbereiches durch den des Ausgangsbereiches schätzungsweise zu timmen.

In der Tat läßt sich nun die Stellungsänderung der Linienelemente, $\arg f'(z) = \Im \log f'(z)$ [1]), schätzen. Diese Schätzung ist keine Folge Verzerrungssatzes. Der *Drehungssatz* tritt vielmehr als selbständiger z neben den Verzerrungssatz, denselben in wesentlichen Stücken erzend.

Ich formuliere den Satz so:

Es gibt Funktionen $\varphi(r)$ *derart, daß für* $|z| \leqq r < 1$ *und jedes in* < 1 *schlichte*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

$$|\Im \log f'(z)| < \varphi(r)$$

Man kann z. B.

$$\varphi(r) = 2 \log \frac{1+r}{1-r}$$

len.

---

[1]) Hier soll $\log f'(z)$ diejenige in $|z| < 1$ reguläre Funktion sein, für die $'(0) = 0$ ist.

Für konvexe und für sternartige Bereiche habe ich diese Schranken wesentlich verbessern können. *Z. B. ist für konvexe Abbildungen*

$$\varphi(r) = 2 \arcsin r$$

die genaue Schranke.

2. Ich beginne mit dem Beweis des folgenden Hilfssatzes:

Für jedes in $|z| < 1$ schlichte

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

gilt

$$|f''(z)| \leqq \frac{2(2+|z|)}{(1-|z|)^3},$$

eine Schranke, welche für

$$f(z) \equiv \frac{z}{(1-z)^2}$$

erreicht wird.

Da nämlich für

$$F(\zeta) = \frac{f\left(\frac{\zeta+z}{1+\zeta\bar{z}}\right)}{f'(z)(1-z\bar{z})}$$

$F'(0) = 1$ ist, und da diese Funktion in $|\zeta| < 1$ schlicht ist, so gilt[2])

$$|F''(0)| = \left|\frac{f''(z)(1-z\bar{z})}{f'(z)} - 2\bar{z}\right| \leqq 4.$$

Daher wird

$$|f''(z)| \leqq \frac{2(2+|z|)}{1-|z|^2}|f'(z)|.$$

Da aber[3])

$$f'(z)| \leqq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}$$

---

[2]) In meiner Abhandlung „Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln", Sitzber. d. Kgl. Pr. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1916, S. 940–955, habe ich auf S. 945 mit Hilfe eines Faberschen Kunstgriffes aus meinem Flächensatz den Schluß gezogen, daß für jedes in $|z| <$ schlichte

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

die Abschätzung $|a_2| \leq 2$ gilt. Auch beim Beweis des Verzerrungssatzes spielt dieser Satz eine wesentliche Rolle. (Vgl. die folgende Fußnote.) In dem dritten Band dieser Zeitschrift (S. 65 bzw. S. 81) geben Löwner bzw. Frank und Löwner an, $|a_2| < 2$ lasse sich mit Hilfe einer Formel von Faber sicherstellen. Solange die Herren nicht angeben, welche der 18 Formeln der Faberschen Arbeit gemeint ist, muß ich diese Angabe bezweifeln. M. E. reicht der Fabersche Spezialfall des Flächensatzes, selbst kombiniert mit dem vorhin erwähnten Faberschen Kunstgriff, nicht aus, $|a_2| < 2$ sicher zu stellen.

[3]) Vgl. G. Pick, Über den Koebeschen Verzerrungssatz. Ber. d. math.-phys. Klasse der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, Bd. 68 (1916), S. 58–64, insbesondere S. 60, Formel (6*) und S. 946, Fußnote 2 meiner eben genannten Abhandlung.

so haben wir wirklich:

$$|f''(z)| \leqq \frac{2(2+|z|)}{(1-|z|)^4}$$

3. Ich schließe sofort einen zweiten Hilfssatz an:

Unter den Voraussetzungen des vorigen Hilfssatzes gilt

$$|f'(z)-1| \leqq \frac{4|z|-3|z|^2+|z|^3}{(1-|z|)^3}.$$

diese Schranke wird für

$$f(z) \equiv \frac{z}{(1-z)^2}$$

eicht.

Es ist nämlich

$$f'(z)-1 = \int_0^z f''(z)\,dz.$$

her wird

$$|f'(z)-1| \leqq \int_0^{|z|} |f''(re^{i\eta})|\,dr \leqq 2\int_0^{|z|} \frac{2+|z|}{(1-|z|)^4}\,d|z| = \frac{4|z|-3|z|^2+|z|^3}{(1-|z|)^3}$$

Für

$$f(z) \equiv \frac{z}{(1-z)^2}$$

d weiter

$$f'(z)-1 \equiv \frac{4z-3z^2+z^3}{(1-z)^3}$$

$z = |z|$ wird also die angegebene Schranke erreicht.

4. Dieser eben bewiesene Hilfssatz ist schon ein Stück des Drehungs-zes. Wenn nämlich

$$|f'(z)-1| \leqq R \leqq 1$$

also die Werte von $f'(z)$ einem Kreise vom Radius R um Eins an-ören, so ist offenbar

$$|\arg f''(z)| \leqq \arcsin R,$$

nn man denjenigen Zweig des Argumentes wählt, der für reelle positive rte der Variabelen Null ist. Da für kleine $|z|$

$$R = \frac{4|z|-3|z|^2+|z|^3}{(1-|z|)^3}$$

ommen werden kann, so schließt man, daß kein Element des Kreises

$$|z| < 0{,}16$$

π oder mehr geschwenkt werden kann. Denn für $|z| < 0{,}16$ ist $R < 1$.

Damit ist der Drehungssatz für eine gewisse Umgebung von $z = 0$ bewiesen. Ich werde ihn nun weiter für die Umgebung einer beliebigen Stelle aus $|z| < 1$ beweisen und dann durch Kombination der Einzelresultate den allgemeinen Satz gewinnen.

5. Ich betrachte wieder

$$F(\zeta) = \frac{f\left(\frac{\zeta + z}{1 + \zeta \bar{z}}\right)}{f'(z)(1 - z\bar{z})}.$$

Setzt man dann

$$m(\varrho) = \frac{4\varrho - 3\varrho^2 + \varrho^3}{(1-\varrho)^3},$$

so wird in $|\zeta| < \varrho$ nach **3.**

$$|F'(\zeta) - 1| = \left| \frac{f'\left(\frac{\zeta + z}{1 + \zeta \bar{z}}\right)}{f'(z)} \left(\frac{1}{1 + \zeta \bar{z}}\right)^2 - 1 \right| < m(\varrho).$$

Daher wird

$$\left| \frac{f'\left(\frac{\zeta + z}{1 + \zeta \bar{z}}\right)}{f'(z)} (1 + \zeta \bar{z})^2 \right| < m(\varrho)(1 + \varrho |z|)^2.$$

Beschränkt man nun ζ auf den Kreisradius durch z, so daß also $\zeta \bar{z}$ positiv reell wird, so hat man hiernach

$$\left| \arg \frac{f'\left(\frac{\zeta + z}{1 + \zeta \bar{z}}\right)}{f'(z)} \right| \leqq \arcsin \frac{m(\varrho)(1 + \varrho |z|)^2}{(1 + \zeta \bar{z})^2} = \arcsin \frac{m(\varrho)(1 + \varrho |z|)^2}{(1 + \varrho |z|)^2} = \arcsin m$$

Setzt man noch

$$\xi = \frac{\zeta + z}{1 + \zeta \bar{z}},$$

so wird für zwei Punkte ξ, z eines und desselben Kreisradius, welche die kreisgeometrische Entfernung ϱ besitzen,

$$\left| \frac{\arg f'(\xi) - \arg f'(z)}{\varrho} \right| \leqq \frac{1}{\varrho} \arcsin m(\varrho).$$

Daher gilt

$$\lim_{\varrho \to 0} \left| \frac{\arg f'(\xi) - \arg f'(z)}{\varrho} \leqq 4. \right|$$

Der kreisgeometrischen Entfernung ϱ möge die euklidische Entfernung Δr entsprechen. Um die kreisgeometrische Entfernung zu bekommen, hat man nur

$$\xi = \frac{\zeta + z}{1 + \zeta \bar{z}}$$

nach ζ aufzulösen und $\varrho = |\zeta|$ zu setzen. So findet man

$$\varrho = \left| \frac{\xi - z}{1 - \xi \bar{z}} \right| = \frac{\Delta r}{1 - \xi \bar{z}}.$$

her wird

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\varrho}{\Delta r} = \frac{1}{1-|z|^2}.$$

raus folgt weiter

$$\lim_{\Delta r \to 0} \left| \frac{\arg f'(\xi) - \arg f'(z)}{\Delta r} \right| = \left| \frac{d \arg f'(re^{i\eta})}{dr} \right| \leqq \frac{4}{1-r^2}.$$

Führt man daher eine Funktion $\vartheta(r)$ ein, die durch

$$\frac{d\vartheta}{dr} = \frac{4}{1-r^2} \quad \text{und} \quad \vartheta(0) = 0$$

klärt ist, setzt man also

$$\vartheta(r) = 2 \log \frac{1+r}{1-r},$$

ist man sicher, daß stets

$$|\arg f'(z)| = |\Im \log f'(z)| \leqq \vartheta(r)$$

Denn für jedes in $|z| < 1$ schlichte

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$$

t nach unseren Darlegungen

$$\left| \frac{d \arg f'(re^{i\eta})}{dr} \right| \leqq \frac{4}{1-r^2}.$$

her wird auch

$$|\arg f'(z)| \leqq 2 \log \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Ich will den Fortschritt, der seit dem zweiten Hilfssatz im Drehungs- z erzielt wurde, an einem Beispiel erläutern. Es zeigt sich nämlich zt, daß für $|z| < 0{,}65$ die Drehung noch unter π bleibt. Kein Linien- ment dieses Kreises wird um mehr als π geschwenkt, d. h. bei Durch- fung der Bildkurve eines Kreisradius dreht sich dessen Tangente um niger als π.

6. Ich will nun die Frage entscheiden, ob die gefundene Drehungs- ranke die genaue ist, ob es also Funktionen gibt, deren Drehung der h unserer Abschätzung möglichen nahekommt.

Wenn man durch ein Vielfaches von

$$\log \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

chätzen will, so kann kein kleinerer Faktor als 2 vor diesen Ausdruck en. Denn für

d

$$f(z) \equiv \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$f'(z) \equiv \frac{1+z}{(1-z)^3}.$$

Setzt man hier $z = ir$ ein, so wird

$$\lim_{r \to 0} \frac{\Im \log \frac{1-ir}{(1-ir)^2}}{r} = 4$$

so wie auch

$$\lim_{r \to 0} \frac{2 \log \frac{1-r}{1-r}}{r} = 4$$

ist. Die gefundene Schranke ist also jedenfalls für $z \to 0$ asymptotisch richtig. Für $|z| \to 1$ ist sie, wie man an einem Beispiel zeigen kann, höchstens doppelt so groß, als sie sein dürfte. Dies lehrt die Funktion

$$f(z) \equiv \frac{e^{(1+i)\log\frac{1+z}{1-z}} - 1}{2(1+i)}.$$

Sie bildet $|z| < 1$ schlicht ab. Denn

$$\log \frac{1+z}{1-z}$$

führt $|z| < 1$ in einen Streifen der Breite π über, welcher zur reellen Achse parallel orientiert und zu Null symmetrisch ist. Die 45^0-Linie durchsetzt ihn in der Länge $\pi\sqrt{2}$. Multipliziert man den Streifen mit $1+i$, so wird er um 45^0 gedreht und zugleich auf das $\sqrt{2}$-fache vergrößert. Die genannte Linie kommt also auf die imaginäre Achse zu liegen und erhält die Länge 2π. Der gedrehte Streifen enthält also keine zwei Stellen, deren Koordinaten sich um Vielfache von $2\pi i$ unterscheiden. Daher wird der Streifen durch die Exponentialfunktion und also $|z| < 1$ durch unser $f(z)$ schlicht abgebildet. Außerdem wird

$$f'(z) = e^{(1+i)\log\frac{1+z}{1-z}} \cdot \frac{1}{1-z^2}.$$

Daher ist $f'(0) = 1$ und längs der positiven reellen Achse ist

$$\Im \log f'(z) = \log \frac{1+z}{1-z}.$$

Die beiden eben gefundenen Ergebnisse könnten die Hoffnung erwecken, daß die gefundene Schranke die genaue sei. Aber das ist nicht der Fall. Denn die Schranke ist durch die äußersten Werte bestimmt, welche

$$\frac{d \arg f'(re^{i\varphi})}{dr}$$

annehmen kann. Sie kann daher nur dann für ein gewisses $|z|$ durch eine gewisse Funktion $f(z)$ erreicht werden, wenn sie auch für alle klei

n z von derselben Funktion erreicht wird. Dann müßte also auch eine solche Funktion

$$\limsup_{z \to 0} \frac{\Im \log f'(z)}{|z|} = 4$$

Nun aber ist

$$f'(z) = 1 + 2a_2 z + \ldots,$$

$$\log f'(z) = -2a_2 z + \ldots.$$

mit $f(z)$ auch $e^{-i\varphi} f(e^{i\varphi} z)$ in $|z| < 1$ schlicht ist, dürfen wir a_2 tiv reell annehmen. Daher wird

$$\Im \log f'(z) = -2a_2 |z| \sin \arg z + \ldots.$$

ist

$$\limsup_{z \to 0} \frac{\Im \log f'(z)}{|z|} = 2a_2.$$

aber[4]) $|a_2| < 2$ ist und nur für

$$f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\varphi})^2}$$

Wert zwei erhält, so finden wir, daß nur für diese Funktion

$$\limsup_{z \to 0} \frac{\Im \log f'(z)}{|z|} = 4$$

l. Dies wäre also die einzige Funktion für welche die gefundene anke erreicht werden könnte. Tatsächlich aber wird sie für diese ktion nicht erreicht, da bei dieser Schlitzabbildung stärkere Schwen- gen als $\frac{3\pi}{2}$ überhaupt nicht vorkommen können.

Es gibt weiter auch keine Funktionenfolge, deren Glieder in einzelnen kten der Schranke beliebig nahe kommen könnten. Denn dann müßte den schon dargelegten Gründen die Folge wieder gegen

$$\frac{z}{(1 - e^{i\varphi} z)^2}$$

vergieren. Aber keine Nachbarfunktion dieser Funktionen führt zu hungen, welche unserer Schranke beliebig nahe kommen. So habe ich im Drehungssatz für beliebige schlichte Abbildungen eine einiger- en gute, aber doch nicht die bestmögliche Abschätzung erhalten.

7. Zu völlig abschließenden Ergebnissen bin ich bei den *konvexen ildungen* gelangt. Wenn eine Funktion $f(z)$ in $|z| < 1$ regulär ist, en Kreis auf ein konvexes schlichtes Polygon von höchstens n Seiten

[4]) a. a. O.[12]).

abbildet und dazu noch den Bedingungen $f(0)=0$ und $f'(0)=1$ genügt so kann man sie bekanntlich so schreiben:

$$f(z) \equiv \int_0^z (1-e^{i\alpha_1}z)^{\mu_1} \dots (1-e^{i\alpha_n}z)^{\mu_n}\, dz.$$

Dabei sind die $\alpha_\varkappa$ und $\mu_\varkappa$ reelle Zahlen, die den Bedingungen

$$\mu_\varkappa \leqq 0$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \mu_\varkappa = -2 \qquad (k=1, 2, \dots, n$$

genügen. Dann wird

$$\arg f'(z) = \sum \mu_\varkappa \arg(1-e^{i\alpha_\varkappa}z).$$

Da aber die Punkte

$$1-e^{i\alpha_\varkappa}z$$

einem Kreise vom Radius $|z|$ um $z=1$ angehören, so wird

$$\arg(1-e^{i\alpha_\varkappa}z) \leqq \arcsin|z|.$$

Daher haben wir

$$\arg f'(z) \leqq 2\arcsin|z|.$$

Im ganzen Einheitskreis gilt also z. B.

$$|\arg f'(z)| \leqq \pi.$$

Bei konvexen Abbildungen kommen also größere als Kehrtschwenkungen nicht vor. In der Tat gelten nämlich die gefundenen Abschätzungen nicht nur für die Abbildung auf konvexe n-Ecke, sondern für beliebige konvexe Abbildungen. Denn die gewonnene Schranke ist von der Eckenzahl unabhängig und man kann eine jede konvexe Abbildung mit beliebiger Genauigkeit durch konvexe Polygonabbildungen approximieren.

Die gefundene Abschätzung ist die genaue. Denn die Funktion

$$\omega = \frac{z}{1-z},$$

welche $|z|<1$ auf die Halbebene $\Re(\omega) > -\frac{1}{2}$ abbildet, liefert

$$\arg \omega' = -2\arg(1-z).$$

Für geeignet gewählte z wird sonach

$$\arg \omega' = 2\arcsin|z|.$$

Tatsächlich werden auch Radien von $|z|<1$, welche gegen die positive reelle Achse schwach geneigt sind, in Halbkreisbogen übergeführt, welche in schwacher Neigung gegen die positive reelle Achse beginnen und senkrecht zu $\Re(\omega) = -\frac{1}{2}$ münden.

8. Unter einem *Stern* mit dem Mittelpunkt $z = 0$ verstehen wir mit ttag-Leffler einen Bereich, der von jeder Geraden durch $z = 0$ in nur einer Strecke geschnitten wird. Herr Alexander[5]) hat die natürlich ht beweisbare Bemerkung gemacht, daß

$$W(z) = Z\,\omega'(z)$$

n und nur dann $|z| < 1$ auf einen Stern mit dem Mittelpunkt $z = 0$ ildet, wenn $\omega(z)$ eine konvexe schlichte Abbildung desselben Kreises ert[5]). Soll aber $\omega(z)$ konvex abbilden, so muß bekanntlich[6])

$$\Re\left(1 + \frac{z\,\omega''}{\omega'}\right) \geqq 0,$$

. es muß

$$\left|\arg\left(1 + \frac{z\,\omega''}{\omega'}\right)\right| \leqq \frac{\pi}{2}$$

. Daraus folgt

$$|\arg(W'(z))| = |\arg(\omega' + z\,\omega'')| \leqq 2 \arcsin|z| + \frac{\pi}{2}.$$

Man kann indessen diese Abschätzung wesentlich verschärfen, wenn n auf

$$1 + \frac{z\,\omega''}{\omega'}$$

unter dem Namen Lindelöfsches Prinzip bekannte Folgerung aus n Schwarzschen Lemma anwendet.

Da nämlich

$$\zeta = 1 + \frac{z\,\omega''}{\omega'}$$

Kreis $|z| < 1$ auf $\Re\,\zeta > 0$ abbildet, so wird durch diese Funktion $r < 1$ auf das Innere desjenigen Kreises abgebildet, in den $|z| < r$ ch

$$\zeta = \frac{2z}{1-z} + 1$$

[5]) J. W. Alexander, Functions which map the interior of the unit circle upon ple regions, Ann. of mat. 2 ser. vol. 17 (1915), S. 12–22. Die Bedingung dafür. $\omega(z)$ konvex und die dafür, daß $z\,\omega'(z)$ auf einen Stern abbildet, lautet näm- beide Male dahin, daß $\arg(z\,\omega'(z))$ bei Durchlaufung des Einheitskreises monoton 2π wächst.

[6]) E. Study, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie. Zweites . Herausgegeben unter Mitwirkung von W. Blaschke. Konforme Abbildung ach zusammenhängender Bereiche, Leipzig 1913, S. 109. Ein einfacher Beweis iuft so. Bei Durchlaufung des Einheitskreises muß

$$\arg(z\,\omega'(z)) = \Im \log(z\,\omega')$$

oton wachsen. Daher ist die Ableitung positiv. Das ergibt

$$\Im i\left(1 + \frac{e^{i\varphi}\,\omega''}{\omega'}\right) = \Re\left(1 + \frac{e^{i\varphi}\,\omega''}{\omega'}\right) > 0.$$

übergeführt wird. Der Mittelpunkt dieses Kreises liegt bei

$$\frac{-r}{1+r}+1+\frac{r}{1-r}=\frac{1+r^2}{1-r^2}$$

und sein Radius ist

$$\frac{2r}{1-r^2}.$$

Daher wird für $|z|<r$

$$\left|\arg\left(1+\frac{z\omega''}{\omega'}\right)\right| \leqq \arcsin\frac{2r}{1+r^2}.$$

Daher wird nun also

$$\left|\arg W'(z)\right| \leqq \left|\arg\omega'\right| + \left|\arg\left(1+\frac{z\omega''}{\omega'}\right)\right|$$

die gewünschte genauere Abschätzung. Sie lehrt wie die vorige ungenauere, daß in $|z|<1$

$$\left|\arg W'(z)\right| \leqq \frac{3\pi}{2}$$

ist. Das ist eine genaue Schranke, die für

$$W(z) \equiv \frac{z}{(1-z)^2}$$

erreicht wird. Denn diese Funktion bildet $|z|<1$ auf die längs der negativen reellen Achse von $-\frac{1}{4}$ bis ∞ begrenzte Vollebene ab. Bei dieser Schlitzabbildung wird aber ein gegen die positive reelle Achse schwach geneigter Kreisradius in einen Kurvenbogen übergeführt, der in schwacher Neigung gegen die positive reelle Achse beginnt und senkrecht zum Schlitz mündet. Seine Tangente dreht sich also um nahezu $\frac{3\pi}{2}$.

9. Wenn so auch unsere Abschätzung für das ganze Innere des Einheitskreises die genaue Schranke liefert, so ist doch damit für die kleineren konzentrischen Kreise nicht die genaue Schranke gewonnen. Soll nämlich für irgendein z in der Abschätzung das Gleichheitszeichen stehen, so muß in den beiden Abschätzungen

$$\left|\arg\omega'\right| \leqq 2\arcsin|z|,$$

$$\left|\arg\left(1+\frac{z\omega''}{\omega'}\right)\right| \leqq \arcsin\frac{2|z|}{1+|z|^2}$$

für ein und dasselbe z das Gleichheitszeichen stehen. Damit aber in der zweiten der beiden Abschätzungen das Gleichheitszeichen gilt, muß nach dem Schwarzschen Lemma

$$1+\frac{z\omega''}{\omega'} \equiv 1+\frac{2z}{1-z}$$

sein. Das liefert

$$\omega' = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

atsächlich ist dann ja

$$\left|\arg\left(1+\frac{2z}{1-z}\right)\right| = \arcsin\frac{2|z|}{1+|z|^2}$$

r ein geeignet gewähltes z. Für dasselbe z müßte dann aber auch

$$\arg\frac{1}{(1-z)^2} = 2\left|\arg\left(\frac{1}{1-z}\right)\right| = 2\arcsin|z$$

in. Daher müßte bei den beiden linearen Abbildungen

$$\frac{1}{1-z} \quad \text{und} \quad 1+\frac{2z}{1-z} = \frac{1+z}{1-z}$$

n und derselbe Punkt des Kreises $|z| = r$ so verschoben werden, daß unter den Bildpunkten aller Punkte dieses Kreises $|z| = r$ das größte rgument bekommt. Man sieht aber leicht, daß diese äußerste Lage bei

$$\frac{1+z}{1-z}$$

e Punkte $\pm ir$ erhalten, während es bei

$$\frac{1}{1-z}$$

e Punkte sind, in welchen die von 1 ausgehenden Tangenten den Kreis $|z| = r$ berühren. Man erkennt beides ganz mühelos durch geometrisches tudium der Abbildung.

Die gefundene Schranke ist also noch zu hoch.

10. Die Schwierigkeit, die sich eben der vollen Erledigung des Sternroblems entgegenstellte, scheint dieselbe zu sein, wie die, welche sich arbietet, wenn es gilt, den Einfluß der Randgestalt des Bildbereiches auf erzerrung oder Drehung zu studieren. Dahin gehört etwa die Behandlung er konvexen beschränkten Bereiche oder die Abbildung von $|z| > 1$ auf as Äußere des Profils eines Flugzeugflügels. Die Wichtigkeit, die diese bbildung für die Theorie der Tragfähigkeit eines Flugzeuges hat, hat err von Mises[7]) erkannt. Eine scharfe Abschätzung der Drehung würde erlauben, die Abschätzung der Tragfähigkeit, die Mises a. a. O. gegeben at, noch weiter zu treiben. Denn es würde dann möglich sein, feststellen, aus welchem Punkt von $|z| = 1$ näherungsweise die Ecke des rofils entspringt.

[7]) v. Mises, Zur Theorie des Tragflächenauftriebes I, Zeitschrift für Flugtechnik nd Motorluftschiffahrt 1917, Heft 21/22.

(Eingegangen am 21. Februar 1919.)

Über Funktionen mehrerer Veränderlicher, die nach jeder einzelnen Veränderlichen stetig sind.

Von

Hans Hahn in Bonn.

Ist die Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ stetig nach jeder einzelnen ihrer Veränderlichen bei Festhaltung aller übrigen, so ist sie, wie H. Lebesgue gezeigt hat, von höchstens $(n-1)$-ter Klasse, und zwar kann sie wirklich von $(n-1)$-ter Klasse sein[1]). Insbesondere ist also jede Funktion $f(x_1, x_2)$, die stetig ist nach x_1 bei festgehaltenem x_2 und stetig nach x_2 bei festgehaltenem x_1 von höchstens erster Klasse, und mithin nach dem bekannten Satze von R. Baire nur punktweise unstetig. Es läßt sich aber noch mehr behaupten[2]): Auf jeder Geraden $x_2 = \text{const.}$ (ebenso auf jeder Geraden $x_1 = \text{const.}$) liegen überall dicht Stetigkeitspunkte von $f(x_1, x_2)$, d. h. Punkte, in denen $f(x_1, x_2)$ stetig ist als Funktion des Punktes (x_1, x_2).

Obwohl nun eine Funktion zweiter Klasse im allgemeinen nicht mehr punktweise unstetig ist, gilt dies doch noch, wie R. Baire gezeigt hat[3]), für Funktionen $f(x_1, x_2, x_3)$, die nach jeder der drei Veränderlichen stetig sind; auch hier liegen die Stetigkeitspunkte sogar dicht auf jeder Ebene $x_i = \text{const.}$ $(i = 1, 2, 3)$. Doch kann es zu den Koordinatenachsen parallele Gerade geben, deren sämtliche Punkte Unstetigkeitspunkte von $f(x_1, x_2, x_3)$ sind.

Der Beweis, den Herr Baire für diese Behauptungen gibt, ist wohl auf den Fall $n > 3$ nicht anwendbar. Im folgenden soll aber gezeigt werden, daß analoge Tatsachen allgemein gelten, was bei der mit wachsendem n wachsenden Klasse von f zunächst vielleicht nicht zu erwarten schien: ist die Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ stetig nach jeder ihrer n Veränderlichen, so ist sie nur punktweise unstetig, und ihre Stetigkeitspunkte

---

[1]) H Lebesgue, Journ. de math. (6) 1 (1905), S. 201.

[2]) R. Baire, Ann. di mat. (3) 3 (1899). S. 27; E. B. Van Vleck, Am. Trans. 8 (1907), S. 198.

[3]) R. Baire, a. a. O. [2]), S. 95.

en sogar auf jeder Mannigfaltigkeit $x_i = \text{const.}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ dicht. ch kann es zu den Koordinatenachsen parallele Mannigfaltigkeiten von 2 Dimensionen geben, deren sämtliche Punkte Unstetigkeitspunkte $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sind.

Wir bezeichnen die Menge aller Punkte $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ als den $\mathfrak{R}_n$, Menge aller Punkte $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ als den $\mathfrak{R}_{n-1}$. Dabei heißt Punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ die Projektion des Punktes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ den $\mathfrak{R}_{n-1}$.

In bekannter Weise nennen wir eine Punktmenge des $\mathfrak{R}_n$ (des $\mathfrak{R}_{n-1}$) n im $\mathfrak{R}_n$ (im $\mathfrak{R}_{n-1}$), wenn ihr Komplement zum $\mathfrak{R}_n$ (zum $\mathfrak{R}_{n-1}$) abchlossen ist. Unter einer Umgebung des Punktes a verstehen wir eine ne, a enthaltende Punktmenge. Nach dem Vorgange von R. Baire nen wir eine Menge *von erster Kategorie* im $\mathfrak{R}_n$ (im $\mathfrak{R}_{n-1}$), wenn sie einigung abzählbar vieler im $\mathfrak{R}_n$ (im $\mathfrak{R}_{n-1}$) nirgends dichter Mengen Eine Menge, die nicht von erster Kategorie ist, heißt *von zweiter tegorie*. Jede offene Punktmenge ist von zweiter Kategorie.

In bekannter Weise definieren wir die *Borelschen Mengen* durch die tsetzung: Borelsche Mengen erster Ordnung sind die abgeschlossenen offenen Punktmengen. Ist α eine Ordinalzahl der ersten oder zweiten lklasse, so sind die Borelschen Mengen α-ter Ordnung die Vergungen und Durchschnitte Borelscher Mengen geringerer als α-ter lnung, sofern sie nicht selbst von geringerer als α-ter Ordnung sind. Ebenso definieren wir die *Baireschen Funktionen* durch die Festzung: Bairesche Funktionen nullter Klasse sind die stetigen Funkhen. Ist α eine Ordinalzahl der ersten oder zweiten Zahlklasse, so sind Baireschen Funktionen α-ter Klasse die Grenzfunktionen konvergenter gen von Baireschen Funktionen geringerer als α-ter Klasse, sofern e Grenzfunktionen nicht selbst von geringerer als α-ter Klasse sind.

Es gilt der Satz[4]): *Ist $\mathfrak{B}$ eine Borelsche Menge zweiter Kategorie, gibt es eine offene Menge $\mathfrak{A}$, derart, daß die Menge aller nicht zu gehörigen Punkte von $\mathfrak{A}$ von erster Kategorie ist.*

In der Tat, ist $\mathfrak{B}$ eine Borelsche Menge, so ist die Funktion f, die gleich st auf $\mathfrak{B}$, sonst gleich 0 eine Bairesche Funktion[5]), und mithin[6]) punktse unstetig bei Vernachlässigung von Mengen erster Kategorie. Es gibt eine punktweise unstetige Funktion f^*, die sich von f nur in den kten einer Menge $\mathfrak{N}'$ erster Kategorie unterscheidet Weil f^* punkt-

[4]) H. Lebesgue, Journ. de math. (6) 1 (1905), S. 187.
[5]) H. Lebesgue, a. a. O.[4]), S. 168.
[6]) R. Baire, Acta math. 30 (1906), S. 27.

weise unstetig, ist auch die Menge $\mathfrak{R}''$ aller Unstetigkeitspunkte von f von erster Kategorie, und mithin auch die Vereinigung:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}' + \mathfrak{R}''.$$

Da $\mathfrak{B}$ von zweiter Kategorie, gibt es Punkte von $\mathfrak{B}$, die nicht zu $\mathfrak{R}$ ge hören. Jeder solche Punkt a ist ein Stetigkeitspunkt von f^* und es ist dort

$$f^*(a) = f(a) = 1.$$

Also gibt es eine Umgebung $\mathfrak{A}$ von a, in der:

$$f^* \neq 0.$$

Da sich f und f^* nur in einer Menge erster Kategorie unterscheide bildet die Menge aller Punkte von $\mathfrak{A}$, in denen $f = 0$, d. h. die nicht z $\mathfrak{B}$ gehören, eine Menge erster Kategorie, und die Behauptung ist bewiesen

Satz I: *Ist die Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ stetig nach jeder einzeln ihrer Veränderlichen, ist $\bar{x}_n$ irgendein fester Wert von x_n und sin ε und ϱ positive Zahlen, so ist die Menge aller Punkte des $\mathfrak{R}_{n-1}$, denen:*

(1) $|f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \bar{x}_n)| \leqq \varepsilon$ für $|x_n - \bar{x}_n| < \varrho$

eine Borelsche Menge.

In der Tat, seien:

$$r_1, r_2, \ldots, r_\nu, \ldots$$

die rationalen Zahlen des Intervalles $|x_n - \bar{x}_n| < \varrho$, und sei $\mathfrak{M}_\nu$ die Men aller Punkte des $\mathfrak{R}_{n-1}$, in denen:

(2) $$|f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, r_\nu) - f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \bar{x}_n)| \leqq \varepsilon.$$

Da f und mithin auch $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, r_\nu) - f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \bar{x}$ von höchstens $(n-1)$-ter Klasse, ist $\mathfrak{M}_\nu$ gewiß eine Borelsche Meng Daher ist auch der Durchschnitt:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 . \mathfrak{M}_2 . \ldots . \mathfrak{M}_\nu . \ldots$$

eine Borelsche Menge.

Dieser Durchschnitt $\mathfrak{M}$ aber ist gerade die Menge aller Punkte d $\mathfrak{R}_{n-1}$, in denen (1) gilt. In der Tat, jeder solche Punkt gehört offenb zu $\mathfrak{M}$. Umgekehrt, gehört der Punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ zu $\mathfrak{M}$, so beste (2) für alle ν; und da die r_ν im Intervalle $|x_n - \bar{x}_n|$ dicht sind, g wegen der Stetigkeit von f nach x_n auch (1). Damit ist Satz I bewies

Satz II: *Ist die Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ stetig nach jeder e zelnen ihrer Veränderlichen, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ in jeder U gebung jedes Punktes $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ eine (im $\mathfrak{R}_n$) offene Menge, in überall, abgesehen von einer Menge erster Kategorie, die Ungleichung g*

(3) $$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)| \leqq \varepsilon.$$

Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion. Die Behauptung richtig für $n = 1$; denn dann ist $f(x_1)$ eine stetige Funktion von x_1 d es gibt daher zu jedem $\bar{x}_1$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung von , in der *überall*:

$$|f(x_1) - f(\bar{x}_1)| \leqq \varepsilon.$$

genommen, die Behauptung sei richtig für Funktionen von $n-1$ Verderlichen. Die Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \bar{x}_n)$ ist eine solche. Betet also $\mathfrak{U}_{n-1}$ eine beliebig vorgegebene Umgebung von $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{n-1})$ $\mathfrak{R}_{n-1}$, so gibt es nach Annahme in $\mathfrak{U}_{n-1}$ eine (im $\mathfrak{R}_{n-1}$) offene Punktnge $\mathfrak{A}_{n-1}$, in der, abgesehen von einer Punktmenge $\mathfrak{B}_{n-1}$, die im $\mathfrak{R}_{n-1}$ n erster Kategorie ist, die Ungleichung besteht:

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_n)| \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zu jedem Punkte $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ gibt es nun, weil f als Funktion n x_n stetig ist, ein $\sigma > 0$, so daß:

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \bar{x}_n)| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \text{ für } |x_n - \bar{x}_n| < \sigma.$$

Sei nun $\mathfrak{C}^{(\nu)}$ die Menge aller Punkte von $\mathfrak{A}_{n-1}$, für die dieses $\sigma \geqq \frac{1}{\nu}$ wählt werden kann. Dann ist $\mathfrak{A}_{n-1}$ die Vereinigung aller $\mathfrak{C}^{(\nu)}$:

$$\mathfrak{A}_{n-1} = \mathfrak{C}^{(1)} + \mathfrak{C}^{(2)} + \ldots + \mathfrak{C}^{(\nu)} + \ldots$$

folgedessen können nicht alle $\mathfrak{C}^{(\nu)}$ von erster Kategorie (im $\mathfrak{R}_{n-1}$) sein; nn sonst wäre es auch ihre Vereinigung $\mathfrak{A}_{n-1}$, im Widerspruche zur tsache, daß eine offene Menge niemals von erster Kategorie ist.

Sei also $\mathfrak{C}^{(\nu)}$ nicht von erster, und mithin von zweiter Kategorie. ch Satz I ist $\mathfrak{C}^{(\nu)}$ eine Borelsche Menge. Daher gibt es einen offenen il $\mathfrak{A}'_{n-1}$ von $\mathfrak{A}_{n-1}$, so daß die Menge

$$\mathfrak{K}^{(\nu)} = \mathfrak{A}'_{n-1} - \mathfrak{A}'_{n-1} \cdot \mathfrak{C}^{(\nu)}$$

er nicht zu $\mathfrak{C}^{(\nu)}$ gehörigen Punkte von $\mathfrak{A}'_{n-1}$, von erster Kategorie n $\mathfrak{R}_{n-1}$) ist. Daher ist auch die Vereinigung:

$$\mathfrak{M}_{n-1} = \mathfrak{B}_{n-1} \cdot \mathfrak{A}'_{n-1} + \mathfrak{K}^{(\nu)}$$

n erster Kategorie im $\mathfrak{R}_{n-1}$. Infolgedessen ist auch die Menge $\mathfrak{M}_n$ er Punkte des $\mathfrak{R}_n$, deren Projektion in den $\mathfrak{R}_{n-1}$ zu $\mathfrak{M}_{n-1}$ gehört, von ter Kategorie im $\mathfrak{R}_n$.

Wir bezeichnen nun mit $\mathfrak{G}_n$ die offene Menge aller jener Punkte des , deren Projektion in den $\mathfrak{R}_{n-1}$ zu $\mathfrak{A}'_{n-1}$ gehört und deren n-te Koorate x der Ungleichung genügt:

$$|x_n - \bar{x}_n| < \frac{1}{\nu}.$$

In jedem nicht zu $\mathfrak{M}_n$ gehörigen Punkte von $\mathfrak{G}_n$ ist dann wegen (4) und (5):

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)| \leqq \varepsilon,$$

und da $\mathfrak{M}_n$ von erster Kategorie, ist Satz II bewiesen.

Satz III. *Ist die Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ stetig nach jeder einzelnen ihrer Veränderlichen und punktweise unstetig als Funktion von $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ in jeder Umgebung jedes Punktes $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ eine (im $\mathfrak{R}_n$) offene Menge, in der überall Ungleichung (3) gilt.*

Sei in der Tat $\mathfrak{U}_n$ eine beliebige Umgebung von $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ im $\mathfrak{R}_n$. Nach Satz II gibt es in $\mathfrak{U}_n$ einen offenen Teil $\mathfrak{A}_n$, in dem abgesehen von einer Menge $\mathfrak{K}'$ erster Kategorie:

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)| \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da f punktweise unstetig, ist auch die Menge $\mathfrak{K}''$ aller Unstetigkeitspunkte von f von erster Kategorie. Also ist auch die Vereinigung $\mathfrak{K}' + \mathfrak{K}''$ von erster Kategorie. Und da $\mathfrak{A}$ offen, gibt es in $\mathfrak{A}$ Punkte, die nicht zu $\mathfrak{K}' + \mathfrak{K}''$ gehören, d. h. Stetigkeitspunkte $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ von f, in denen:

$$|f(x_1', x_2', \ldots, x_n') - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \tag{6}$$

Da f stetig im Punkte $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$, gibt es eine Umgebung dieses Punktes, in der:

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1', x_2', \ldots, x_n')| \leqq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

Aus (6) und (7) aber folgt (3), und Satz III ist bewiesen.

Nun gelangen wir zum eigentlichen Ziele dieser Untersuchung:

Satz IV. *Ist die Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ stetig nach jeder einzelnen ihrer Veränderlichen, so ist sie punktweise unstetig als Funktion von $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; und zwar gibt es zu jedem $\bar{x}_n$ eine im $\mathfrak{R}_{n-1}$ dichte Menge von Punkten $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ derart, daß f stetig ist im Punkte $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \bar{x}_n)$.*

Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion. Die Behauptung ist richtig für $n = 2$, wie zuerst von R. Baire bewiesen wurde. Wir nehmen sie als bewiesen an für Funktionen von $n - 1$ Veränderlichen. Mit $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bezeichnen wir die Schwankung (den Unstetigkeitsgrad) von f im Punkte $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Die Unstetigkeitspunkte von f sind dann diejenigen, in denen:

$$\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0.$$

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ die Menge aller derjenigen Punkte des $\mathfrak{R}_{n-1}$, denen:

$$\omega(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \bar{x}_n) \geqq \frac{1}{\nu}.$$

ffenbar ist $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ *abgeschlossen.*

Angenommen nun, die Behauptung von Satz IV wäre nicht richtig. ann gibt es eine im $\mathfrak{R}_{n-1}$ offene Menge $\mathfrak{B}$, so daß für alle $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ n $\mathfrak{B}$:

)
$$\omega(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \bar{x}_n) > 0.$$

Daraus schließen wir: es können nicht alle $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ nirgends dicht im $_{n-1}$ sein. Denn die Menge $\mathfrak{A}_{n-1}$ aller Punkte $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ des $_{n-1}$, für die (8) gilt, ist die Vereinigung aller $\mathfrak{A}^{(\nu)}$:

$$\mathfrak{A}_{n-1} = \mathfrak{A}^{(1)} + \mathfrak{A}^{(2)} + \ldots + \mathfrak{A}^{(\nu)} + \ldots$$

ären alle $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ nirgends dicht, so wäre $\mathfrak{A}_{n-1}$ von erster Kategorie im $_{n-1}$, könnte also — entgegen unserer Annahme — nicht den offenen il $\mathfrak{B}$ enthalten.

Es gibt also ein $\mathfrak{A}^{(\nu)}$, das nicht nirgends dicht im $\mathfrak{R}_{n-1}$ ist; mindestens $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ ist also dicht in einer (im $\mathfrak{R}_{n-1}$) offenen Menge $\mathfrak{C}_{n-1}$, und entlt dann, weil abgeschlossen, alle Punkte von $\mathfrak{C}_{n-1}$; mit anderen Worten: *gibt ein* $\delta > 0$ *und eine im* $\mathfrak{R}_{n-1}$ *offene Menge* $\mathfrak{C}_{n-1}$, *so daß für alle* $_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ *von* $\mathfrak{C}_{n-1}$:

)
$$\omega(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \bar{x}_n) \geqq 2\delta.$$

Nun ist nach Annahme $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \bar{x}_n)$ als Funktion von $_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ punktweise unstetig. Es gibt also gewiß in $\mathfrak{C}_{n-1}$ einen nkt $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{n-1})$, in dem $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \bar{x}_n)$ stetig ist als nktion von $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$. Dann aber gibt es auch eine Umgebung $_{-1}$ von $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{n-1})$ im $\mathfrak{R}_{n-1}$, so daß für alle $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ n $\mathfrak{U}_{n-1}$:

0)
$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_n)| < \frac{\delta}{5}.$$

ir nehmen die Umgebung $\mathfrak{U}_{n-1}$ so klein an, daß sie ganz in $\mathfrak{C}_{n-1}$ liegt.

Sei nun $\mathfrak{D}_{n-1}$ irgendein offener Teil von $\mathfrak{U}_{n-1}$, und sei $\varrho > 0$ beliebig gegeben. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{D}_n$ die Menge aller Punkte $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ s $\mathfrak{R}_n$, deren Projektion in den $\mathfrak{R}_{n-1}$ zu $\mathfrak{D}_{n-1}$ gehört, und für die

$$|x_n - \bar{x}_n| < \varrho.$$

Ist nun $(x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}')$ ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{D}_{n-1}$, so gilt nächst wegen (10):

)
$$|f(x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}', \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_n)| < \frac{\delta}{5}.$$

Da ferner $\mathfrak{D}_{n-1}$ ganz in $\mathfrak{U}_{n-1}$ und $\mathfrak{U}_{n-1}$ ganz in $\mathfrak{E}_{n-1}$ liegt, gilt im Punkte $(x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}')$ Ungleichung (9), und es gibt daher in $\mathfrak{D}_n$ einen Punkt $(x_1'', x_2'', \ldots, x_n'')$, so daß

$$(12) \qquad |f(x_1'', x_2'', \ldots, x_n'') - f(x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}', \bar{x}_n)| > \tfrac{4}{5}\delta.$$

Nach Annahme ist $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n'')$ als Funktion von $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ punktweise unstetig. Nach Satz III gibt es also in $\mathfrak{D}_{n-1}$ eine (im $\mathfrak{R}_{n-1}$) offene Menge $\mathfrak{E}_{n-1}$, so daß für alle $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ aus $\mathfrak{E}_{n-1}$:

$$(13) \qquad |f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n'') - f(x_1'', x_2'', \ldots, x_{n-1}'', x_n'')| \leqq \tfrac{\delta}{5}.$$

Aus (11), (12), (13) nun folgt für alle $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ aus $\mathfrak{E}_{n-1}$:

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n'') - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_n)| > \frac{2\delta}{5}.$$

Und da in allen Punkten $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ von $\mathfrak{E}_{n-1}$ (10) gilt, so ist weiter:

$$(14) \qquad |f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n'') - f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \bar{x}_n)| > \frac{\delta}{5}.$$

Wir sehen also: ist $\varrho > 0$ beliebig gegeben, so gibt es in jedem offenen Teile $\mathfrak{D}_{n-1}$ von $\mathfrak{U}_{n-1}$ einen offenen Teil $\mathfrak{E}_{n-1}$, in dessen sämtlichen Punkten für ein der Ungleichung:

$$|x_n'' - \bar{x}_n| < \varrho$$

genügendes x_n'' Ungleichung (14) erfüllt ist.

Da nun f stetig nach x_n ist, gibt es zu jedem Punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ aus $\mathfrak{U}_{n-1}$ ein $\sigma > 0$, so daß

$$(15) \qquad |f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \bar{x}_n)| < \frac{\delta}{5}$$
$$\text{für } |x_n - \bar{x}_n| < \sigma$$

Sei $\mathfrak{U}_{n-1,\varrho}$ die Menge aller jener Punkte von $\mathfrak{U}_{n-1}$, in denen dieses $\sigma \geqq$ gewählt werden kann, in denen also (15) für $|x_n - \bar{x}_n| < \varrho$ gilt. Nach dem eben Bewiesenen ist dann (für jedes $\varrho > 0$) $\mathfrak{U}_{n-1,\varrho}$ nirgends dicht in $\mathfrak{U}_{n-1}$. Das aber ist unmöglich, denn da:

$$\mathfrak{U}_{n-1} = \mathfrak{U}_{n-1,1} + \mathfrak{U}_{n-1,\frac{1}{2}} + \cdots + \mathfrak{U}_{n-1,\frac{1}{\nu}} + \cdots$$

ist, so wäre $\mathfrak{U}_{n-1}$ von erster Kategorie (im $\mathfrak{R}_{n-1}$), was nicht der Fall ist, da $\mathfrak{U}_{n-1}$ offen (im $\mathfrak{R}_{n-1}$) ist. Damit ist Satz IV bewiesen.

Ist damit gezeigt, daß eine Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, die nach jeder ihrer Veränderlichsn stetig ist, auf jeder $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $x_i = \text{const.}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ Stetigkeitspunkte besitzt, so erkennt man augenblicklich, daß sämtliche Punkte einer $(n-2)$-dimensionale

nnigfaltigkeit $x_i = \text{const.}$, $x_j = \text{const.}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ Unstetigkeits-nkte von f sein können: in der Tat, sei $g(x_1, x_2)$ stetig nach x_1 und tig nach x_2, aber unstetig als Funktion von (x_1, x_2) im Punkte $(0, 0)$. r setzen:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2) \quad \text{für alle } x_3, \ldots, x_n.$$

nn ist f stetig nach jeder seiner Veränderlichen, aber unstetig als nktion von $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in allen Punkten der $(n-2)$-dimensionalen nnigfaltigkeit $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

(Eingegangen am 1. März 1919.)

Beweis der Irreduzibilität der Diskriminante einer algebraischen Form von mehreren Variablen.

Von

Alexander Ostrowski in Göttingen.

---

1. Es sei $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ eine allgemeine Form n-ten Grades der m Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ mit unbestimmten Koeffizienten A_i. Die Koeffizienten von $x_1^n, x_2^n, \ldots, x_m^n$ mögen mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ bezeichnet werden. Bezeichnen wir die ersten partiellen Ableitungen von F nach den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ mit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, so versteht man unter der *Diskriminante* $\Delta(A_i)$ der Form F die Resultante der m Formen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$[1]). Ihr Verschwinden für irgendwelche spezielle Werte der A_i bedeutet, daß die entsprechenden Formen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ für ein System von nicht sämtlich verschwindenden Werten der x verschwinden. Ein solches Wertsystem der x ist dann ein *Doppelpunkt* oder eine *singuläre Stelle* des durch das Nullsetzen von $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ dargestellten algebraischen Gebildes.

Während nun für die beiden in der Eliminationstheorie vorkommenden Bildungen, für die *Resultante* von m allgemeinen Formen von m Variablen und für die *Diskriminante von $m-1$ Formen* von m Variablen der Irreduzibilitätsbeweis längst erbracht worden ist[2]), ist die Irreduzibilität der Diskriminante *einer* allgemeinen Form von m Variablen meines Wissens

---

[1]) Eine Übersicht über die wenigen bisher bekannten Eigenschaften der Diskriminanten findet man bei Netto, Vorlesungen über Algebra, Bd. II, S. 158–165, Leipzig 1900. Vgl. auch G. Salmon, Lessons introductory to the modern higher Algebra, 4th edition, S. 98–107, S. 123, Dublin 1885.

[2]) Siehe z. B. J. König, Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen, 6. Kap., Leipzig 1903. Bereits Kronecker hat in seiner Festschrift (§ 10) im Jahre 1881 den Satz ausgesprochen, daß die Diskriminante eines Systems von $m-1$ Formen von m Variablen irreduzibel ist und den Beweis für eine spätere leider nie erschienene Abhandlung in Aussicht gestellt. Der erste Beweis dieses Satzes ist von König im Jahre 1903 veröffentlicht worden.

ch nicht bewiesen. Nur im Falle einer allgemeinen binären Form, wo Diskriminante auf die Diskriminante der entsprechenden algebraischen eichung hinausläuft, sowie im Falle der allgemeinen quadratischen Form, die Diskriminante die allgemeine symmetrische Determinante ist, ist Irreduzibilität bekannt[3]). Andererseits ist gerade die Irreduzibilität Diskriminante einer allgemeinen Form für die Beurteilung mancher ebraisch-geometrischer Fragen von Bedeutung. Daher dürfte vielleicht folgende einfache Irreduzibilitätsbeweis für die Diskriminante einer gemeinen Form n-ten Grades $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ von m Variabeln von eresse sein. —

Die durch die Gleichung

$$\Delta(A_i) = 0$$

räsentierte Mannigfaltigkeit im Raume der Variablen A_i ist die so- annte *Diskriminantenfläche*, die zu der allgemeinen Form F gehört. d in unserem Satz ist die Tatsache enthalten, daß *die Diskriminanten- che von F nicht zerfällt.* —

2. Da wir die Diskriminante von F mit Hilfe des Resultanten- griffes definiert haben, so möge zuerst an einige Eigenschaften der Re- tanten in geeignet spezialisierter Fassung erinnert werden[4]).

Es seien $f, g, \ldots, h$ m allgemeine Formen $(n-1)$-ten Grades in m Variab $x_1, x_2, \ldots, x_m$ mit unbestimmten Koeffizienten a_i in f, b_i in g, $\ldots$, c_i h. Wir zeichnen eine Variable, etwa x_1 aus und setzen sie gleich 1. Die gregate der Glieder höchster Dimension in den Formen $f(1, x_2, \ldots, x_m)$, $, x_2, \ldots, x_m), \ldots, h(1, x_2, \ldots, x_m)$ — sie sind offenbar gleich $f(0, x_2, \ldots, x_m)$, $), x_2, \ldots, x_m), \ldots, h(0, x_2, \ldots, x_m)$ — mögen durch $f_1, g_1, \ldots, h_1$ be- chnet werden. Die Formen $f_1, g_1, \ldots, h_1$ sind allgemeine Formen der $- 1$ Variablen $x_2, \ldots, x_m$. Wir nehmen nun an, daß wir für $m-1$ rmen in $m-1$ Variablen die Resultanten bereits bilden können, und den die Resultante von $g_1, \ldots, h_1$. Sie möge mit R_1 bezeichnet werden. r $m = 2$ ist R_1 gleich dem Koeffizienten von x_2 in h zu setzen.

Betrachten wir nun das System von $m-1$ Gleichungen

$$g(1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \ \ldots, \ h(1, x_2, \ldots, x_m) = 0.$$

besitzt $(n-1)^{m-1}$ Lösungssysteme

$$\xi_2^{(k)}, \xi_3^{(k)}, \ldots, \xi_m^{(k)}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, (n-1)^{m-1})$$

denen die ξ algebraische Funktionen der unbestimmten Koeffizienten

---

[3]) Siehe z. B. M. Bôcher, Einführung in die höhere Algebra, S. 193, Leipzig 1910, ie etwa König, loc. cit. [2]).

[4]) Siehe z. B. König, loc. cit. [2]), S. 310ff

$b_i, \ldots, c_i$ von $g, \ldots, h$ sind. Über diese algebraischen Funktionen kann noch mehr ausgesagt werden. Man bilde mit Hilfe der Unbestimmten $u_2, \ldots, u_m$ die Formen

$$U^{(k)} = u_2 \xi_2^{(k)} + \ldots + u_m \xi_m^{(k)}.$$

Alle diese Formen genügen einer Gleichung des Grades $\mu = (n-1)^{m-1}$

$$R_1 z^\mu + \ldots \quad = 0,$$

wo die Koeffizienten der weiteren Potenzen von z Polynome in den $b_i, \ldots, c_i, u_i$ mit festen Zahlenkoeffizienten sind.

Für die Resultante R der Formen $f, g, \ldots, h$ gilt nun die Gleichung

$$R = \pm R^{n-1} \prod_{k=1}^{k=\mu} f(1, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_m^{(k)}), \tag{2}$$

und diese Relation gilt, was für das folgende wesentlich ist, auch dann, wenn man die $a_i, b_i, \ldots, c_i$ irgendwie spezialisiert, doch so, daß R_1 von 0 verschieden bleibt, in R und R_1 die spezialisierten Werte einträgt und unter $\xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_m^{(k)}$ die Lösungssysteme der spezialisierten Gleichungen (1) versteht.

Wir spezialisieren nun $f, g, \ldots, h$ so, daß sie gleich den partiellen Ableitungen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ von $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ werden. Dann entsteht aus R der Ausdruck Δ, aus R_1 die Diskriminante Δ_1 der Form $F(0, x_2, \ldots, x_m)$. Der Koeffizient α_1 von x_1^m kommt in $\varphi_2, \ldots, \varphi_m$ nicht vor. Daher hängen auch die spezialisierten $\xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_m^{(k)}$, die Lösungssysteme der Gleichungen

$$\varphi_2(1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \ \ldots, \ \varphi_m(1, x_2, \ldots, x_m) = 0$$

von α_1 gar nicht ab. Daher folgt aus (2), daß in Δ der Koeffizient der höchsten — μ-ten — Potenz von α_1 gleich Δ_1^{n-1} ist, von einer von 0 verschiedenen Konstante abgesehen. Für $m = 2$ ist $\Delta_1 = n\alpha_2$ zu setzen[5].

3. Nehmen wir nun an, daß für Δ die folgende Zerlegung in absolut irreduzible Faktoren besteht:

$$\Delta = P_1 P_2 \ldots P_e,$$

wo keines der Polynome $P_1, P_2, \ldots, P_e$ eine Konstante ist. *Dann kommt alles darauf an, zu zeigen, daß keiner der Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha$ zugleich in zwei Faktoren P vorkommen kann.* Denn angenommen, wir hätten dies bereits gezeigt, und es sei dann etwa P_1 der Faktor, in dem α_1 vorkommt. Dann sind nur zwei Fälle möglich:

---

[5]) Hieraus ergibt sich durch vollständige Induktion, daß die Diskriminante von F nicht identisch verschwindet.

1. In P_1 kommt wenigstens einer von den Koeffizienten $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$ r. Da aber alle Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ gleichberechtigt sind (schon B. weil Δ und daher jedes P_i eine Invariante ist und jede Vertauschung r x_i Vertauschung der entsprechenden α_i bewirkt), müssen in P_1 *alle* α rkommen, daher kommen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ in $P_2, \ldots, P_e$ nicht vor. Nun t nach dem obigen der Koeffizient von α_1^μ in Δ die Form $c\Delta_1^{n-1}$. Hier- s folgt sofort durch vollständige Induktion, daß in Δ ein Glied vorkommt n der Form $c_1 \alpha_1^\mu \alpha_2^\mu \ldots \alpha_m^\mu$, wo $c_1 \neq 0$ ist. Daher muß auch in P_1 ein sol- es Glied vorkommen. Andererseits ist Δ homogen, folglich müßten , ..., P_e Konstanten sein. Daher können wir $\Delta = P_1$ setzen.

2. In P_1 kommt keiner von den Koeffizienten $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$ vor. Es mme α_2 etwa in P_2 vor. Dann kann in P_2 kein weiterer von den beffizienten α vorkommen. Wir können dann weiter annehmen, daß α_3 $P_3, \ldots, \alpha_m$ in P_m vorkommen, und es ist allgemein P_i in Bezug auf α_i m Grade μ. Aus der Tatsache, daß in Δ ein Glied von der Form $\alpha_1^\mu \alpha_2^\mu \ldots \alpha_m^\mu$ vorkommt, folgt jetzt, daß

$$\Delta = P_1 P_2 \ldots P_m$$

. Daher muß in Δ der Koeffizient von $\alpha_1^\mu \alpha_2^\mu \ldots \alpha_m^\mu$ von der Form $P_{m-1} P_m$ sein, wo $c_2 \neq 0$ ist. Andererseits folgt durch vollständige duktion, daß in Δ der Koeffizient von $\alpha_1^\mu \ldots \alpha_{m-2}^\mu$ eine Potenz der iskriminante der allgemeinen *binären* Form $F(0, 0, \ldots, 0, x_{m-1}, x_m)$ ultipliziert mit einem von 0 verschiedenen Zahlenfaktor ist. Und diese iskriminante ist bekanntlich irreduzibel. Daher ist dieser Fall unmöglich.

4. Um nun zu beweisen, daß etwa α_1 nur in einem der Faktoren P_i rkommt, genügt es, in der Diskriminante einer geeignet spezialisierten rm F einen solchen absolut irreduziblen Faktor nachzuweisen, der in zug auf α_1 vom Grade $\mu = (n-1)^{m-1}$ ist. Wir wählen als F die Form

$$= \frac{1}{n} \alpha_1 x_1^n + \frac{1}{n(n-1)} \{x_2^n + \ldots + x_m^n\} - \frac{1}{n-1} x_1^{n-1} \{\beta_2 x_2 + \ldots + \beta_m x_m\}.$$

r ihre partiellen Ableitungen nach $x_1, x_2, \ldots, x_m$ erhalten wir:

$$= \alpha_1 x_1^{n-1} - \beta_2 x_2 x_1^{n-2} - \ldots - \beta_m x_m x_1^{n-2} = x_1^{n-1} \{\alpha_1 x_1 - \beta_2 x_2 - \ldots - \beta_m x_m\},$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{n-1} (x_2^{n-1} - \beta_2 x_1^{n-1}), \ldots, \varphi_m = \frac{1}{n-1} (x_m^{n-1} - \beta_m x_1^{n-1}).$$

tzen wir $x_1 = 1$ in den φ, so sind die Aggregate der höchsten Glieder n $\varphi_2, \ldots, \varphi_m$:

$$\frac{1}{n-1} x_2^{n-1}, \ldots, \frac{1}{n-1} x_m^{n-1}.$$

e Resultante muß von 0 verschieden sein. Denn sonst würde das eichungssystem

$$\frac{1}{n-1} x_2^{n-1} = 0, \ldots, \frac{1}{n-1} x_m^{n-1} = 0$$

ein solches Lösungssystem besitzen, in dem entweder x_2, oder $x_3, \ldots,$ oder x_m von 0 verschieden ist. Daher ist auf die Diskriminante von F die Darstellung (2) anwendbar. Ist ε eine primitive $(n-1)$-te Einheitswurzel, so sind die $\mu = (n-1)^{m-1}$ Lösungssysteme der Gleichungen

$$x_2^{n-1} - \beta_2 = 0, \ldots, x_m^{n-1} - \beta_m = 0$$

durch die Formeln gegeben

$$x_2 = \varepsilon^{p_2} \sqrt[n-1]{\beta_2}, \ldots, x_m = \varepsilon^{p_m} \sqrt[n-1]{\beta_m},$$

in denen $p_2, \ldots, p_m$ unabhängig voneinander alle Werte $0, 1, \ldots, n-1$ annehmen können. Die Diskriminante von F ist dann abgesehen von einem von 0 verschiedenem Zahlenfaktor gleich

$$(3) \qquad \prod_{p_2, \ldots, p_m} \left(\alpha_1 - \varepsilon^{p_2} \sqrt[n-1]{\beta_2^n} - \varepsilon^{p_3} \sqrt[n-1]{\beta_3^n} - \ldots - \varepsilon^{p_m} \sqrt[n-1]{\beta_m^n}\right).$$

Da Δ für $n = 2$ in bezug auf jedes der α linear und unsere Behauptung daher trivial ist, können wir $n > 2$ annehmen. Unter dieser Annahme werden wir zeigen, daß der Ausdruck (3) durch kein von α_1 abhängiges Polynom in $\alpha_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ teilbar ist, dessen Grad in bezug auf α_1 kleiner wäre als $\mu = (n-1)^{m-1}$. In der Tat ist (3) ein Polynom in $\alpha_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$. Es sei $P(\alpha_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ ein von α_1 abhängiges absolut irreduzibles Polynom in $\alpha_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, welches in (3) als Teiler enthalten ist. Dann hat P als Polynom in α_1 für jedes Wertsystem von $\beta_2, \ldots, \beta_m$ wenigstens eine der Zahlen

$$(4) \qquad \varepsilon^{p_2} \sqrt[n-1]{\beta_2^n} + \ldots + \varepsilon^{p_m} \sqrt[n-1]{\beta_m^n}$$

als Nullstelle. Ich setze nun in P

$$\beta_2 = \gamma_2^{n-1}, \ldots, \beta_m = \gamma_m^{n-1}$$

und behaupte, daß das Polynom $P(\alpha_1, \gamma_2^{n-1}, \ldots, \gamma_m^{n-1})$ als Funktion von α_1 für *unbestimmte* $\gamma_2, \ldots, \gamma_m$ wenigstens einen der Ausdrücke

$$(5) \qquad \varepsilon^{p_2} \gamma_2^n + \ldots + \varepsilon^{p_m} \gamma_m^n$$

zur Wurzel besitzt. Denn sonst würde das Produkt

$$\prod_{p_2, \ldots, p_m} P(\varepsilon^{p_2} \gamma_2^n + \ldots + \varepsilon^{p_m} \gamma_m^n, \gamma_2^{n-1}, \ldots, \gamma_m^{n-1})$$

nicht identisch in den γ verschwinden, daher würde es für ein Wertsystem der γ von 0 verschieden sein, dann würde aber für die entsprechenden das Polynom $P(\alpha_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ keine der Zahlen (4) zur Wurzel haben. Hat aber $P(\alpha_1, \gamma_2^{n-1}, \ldots, \gamma_m^{n-1})$ einen Ausdruck (5) zur Wurzel, so bedenken wir, daß es unverändert bleibt, wenn man die γ mit beliebigen

$n-1$)-ten Einheitswurzeln multipliziert. Dadurch können wir aber aus nem Ausdruck (5) alle μ Ausdrücke (5) erhalten, die also alle Wurzeln on $P(\alpha_1, \gamma_2^{n-1}, \ldots, \gamma_m^{n-1})$ sind. Daher muß P in bezug auf α_1 wenigstens om Grade $\mu = (n-1)^{m-1}$ sein, w. z. b. w.

Man leitet aus der hiermit bewiesenen Irreduzibilität von $\Delta(A_i)$ ohne chwierigkeit die folgende charakteristische Eigenschaft der Diskrimiinanten ab:

Man setze in $F(x_1, \ldots x_m)$ für x_1 den Wert 1 ein. Dann sind die artiellen Ableitungen des entstehenden Polynoms nach $x_2, \ldots, x_m$ bzw. eich $\varphi_2(1, x_2, \ldots, x_m)$, $\varphi_3(1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, \varphi_m(1, x_2, \ldots, x_m)$. *Dann lt für $\Delta(A_i)$ die Darstellung*

$$\Delta(A_i) = M_1(A_i, x_2, \ldots, x_m) F(1, x_2, \ldots, x_m) + M_2(A_i, x_2, \ldots, x_m)$$
$$\varphi_2(1, x_2, \ldots, x_m) + \ldots + M(A_i, x_2, \ldots, x_m) \varphi_m(1, x_2, \ldots, x_m),$$

der $M_1, M_2, \ldots, M_m$ Polynome in $A_i, x_2, \ldots, x_m$ sind, und jedes reduzible Polynom in den A_i, welches eine solche Darstellung zuläßt, nterscheidet sich von $\Delta(A_i)$ nur um eine multiplikative Konstante.

(Eingegangen am 22. März 1919.)